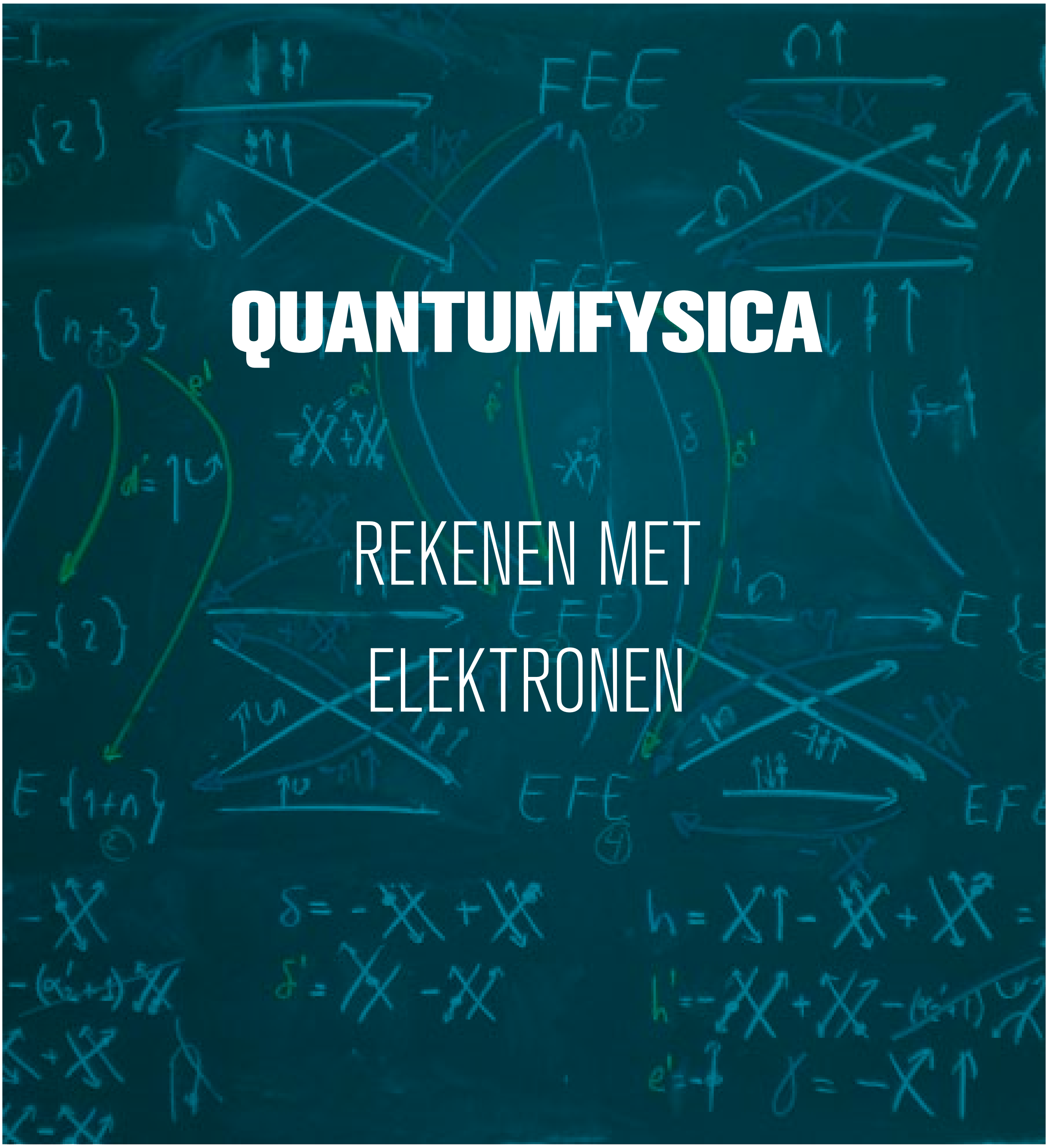


QUANTUMFYSICA

REKENEN MET ELEKTRONEN

Naam:

Klas:

Datum:

De Praktijk

REKENEN MET ELEKTRONEN

LIEVEN VANDERSYPEN

Lieven Vandersypen doet met zijn groep in Delft onderzoek naar mogelijke quantumcomputers. Hij gebruikt in zijn onderzoek losse elektronen die hij met magnetische en elektrische velden vangt en manipuleert. Hij doet dit op een zodanige manier dat ze met elkaar verstrengeld raken, zodat ze voor hem kunnen gaan rekenen.

1. Bediscussieer met zijn tweeën hoe je de spintoestand van twee deeltjes met elkaar kunt verstrengelen.

....

....

Bekijk het filmpje van Lieven Vandersypen over zijn onderzoek naar quantumcomputers op *http//www.quantumuniverse.nl/filmpjes.*

Net als veel andere onderzoekers probeert Lieven dus een quantumcomputer te bouwen die rekent met behulp van de spin van elektronen.

2. Brainstorm in groepjes van twee over de vraag: waarom wordt juist de spin van elektronen door zo veel onderzoekers gebruikt als qubit? Schrijf minstens twee redenen op. Als je geen antwoord weet kun je nog een keer het filmpje van Lieven Vandersypen bekijken.

1. ....

....

2. ....

....

Het is voor een quantumcomputer dus heel belangrijk om bewerkingen uit te voeren met deeltjes die zich in een superpositie van toestanden bevinden. In het geval van Lieven zijn dat supergekoelde elektronen. Als deeltjes verstrengeld zijn en als hun toestand bovendien een superpositie is, wordt het omschrijven van hun toestand ingewikkelder dan als er maar een van die twee dingen aan de hand zou zijn.

Voor het voorstellen van bits door elektronen kun je bijvoorbeeld kiezen om elektronen met spin +1 een $|0\rangle$ te laten voorstellen, en elektronen met spin -1 een $|1\rangle$, maar andersom kan ook. Het gaat erom dat je altijd hetzelfde doet. Als je dus aan het begin een keuze maakt voor een van de twee en die vasthoudt kan je quantumcomputer altijd goed rekenen.

3.

A. We kijken eerst naar een systeem met twee qubits. Hieronder is de eerste toestand al gegeven. De eerste $|0\rangle$ staat voor de toestand van de eerste qubit en de tweede $|0\rangle$ staat voor de toestand van de tweede qubit. Noem alle mogelijke toestanden die geen superposities zijn en die je kunt maken met twee qubits.

Toestand 1: $|0\rangle|0\rangle$

Toestand 2: . . . .

. . . .

B. Hoeveel toestanden zou je bij opdracht 3A hebben moeten invullen als het om 3 qubits ging? En als het om 4 qubits ging?

. . . .

. . . .

C. In de inleidende module (Quantumtoestanden) heb je gezien hoe je een superpositie van twee toestanden binnen een deeltje kunt opschrijven. Hoe denk je dat een superpositie van toestand $|0\rangle|0\rangle$ en $|0\rangle|1\rangle$, waarbij beide toestanden even waarschijnlijk zijn, opgeschreven kan worden?

. . . .

. . . .

D. Stel dat je een deeltjespaar creëert dat zich in de toestand $|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle$ bevindt. Vervolgens meet je de toestand van deeltje 1 en vind je $|0\rangle$. Wat zegt dat je dan over de toestand van deeltje 2? Leg je antwoord uit.

. . . .

. . . .

E. Je kunt een toestand van twee deeltjes soms ook als een product van twee individuele deeltjestoestanden beschrijven, bijvoorbeeld $(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)$. Werk van deze toestand de haakjes weg om weer tot een beschrijving van de toestand te komen zoals deze in opdracht 3D gegeven is.

. . . .

. . . .

In de volgende opdrachten kijken we naar twee qubits in de toestand $|0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|1\rangle$.

F. Kun je deze toestand ook uitdrukken op een soortgelijke manier als in opdracht 3E? Leg uit wat er aan de hand is.

....

....

G. Hoe groot is de kans dat je bij een meting aan de tweede qubit een waarde van $|1\rangle$ vindt?

....

H. We meten nu de toestand van de eerste qubit, en vinden een $|0\rangle$. Wat zou nu het antwoord op vraag 3G zijn? Leg uit.

....

....

Tot nu toe hebben we alleen superposities gezien van de vorm $|0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle + \ldots$, waarin de componenten een gelijk "gewicht" hebben. Het blijkt in de quantummechanica ook mogelijk te zijn om superposities te maken van de meer algemene vorm $A|0\rangle|0\rangle + B|0\rangle|1\rangle + \ldots$, waarin A, B, enzovoort positieve, negatieve of zelfs zogenaamde complexe getallen kunnen zijn. Deze getallen bepalen wat de kansen op de mogelijke meetuitkomsten zijn, en hoe een toestand in de loop van de tijd verandert.

De wiskunde hierachter is vrij ingewikkeld en speelt geen rol in wat hierna volgt. Wel zullen we in de rest van deze module toestanden tegenkomen waarin A en B naast de waarde +1 ook de waarde -1 kunnen aannemen. Het minteken zegt in dit geval iets over hoe een toestand in de loop van de tijd verandert, maar verandert niets aan de kansen: ook voor een toestand als $|0\rangle - |1\rangle$ hebben we dus 50% kans om de meetuitkomst 1 te vinden, en 50% kans om de meetuitkomst 0 te vinden.

I. Werk de haakjes weg in de volgende toestanden:

$(|0\rangle + |1\rangle)(-|0\rangle + |1\rangle) =$ ....

$(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle) =$ ....

$(|0\rangle - |1\rangle)(-|0\rangle + |1\rangle) =$ ....

J. Schrijf de volgende toestanden juist als een product:

$|0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle =$ . . . .

$|1\rangle|1\rangle - |0\rangle|1\rangle =$ . . . .

$|0\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle =$ . . . .

K. Beschrijf een toestand van twee verstrengelde qubits als een som van de mogelijke systeemtoestanden. Hoe kun je aan deze toestand zien dat het om twee verstrengelde deeltjes gaat?

. . . .

. . . .

. . . .

L. Kun je de toestand die je in opdracht 3K hebt beschreven ook als een product van de toestanden van de twee qubits schrijven? Motiveer je antwoord.

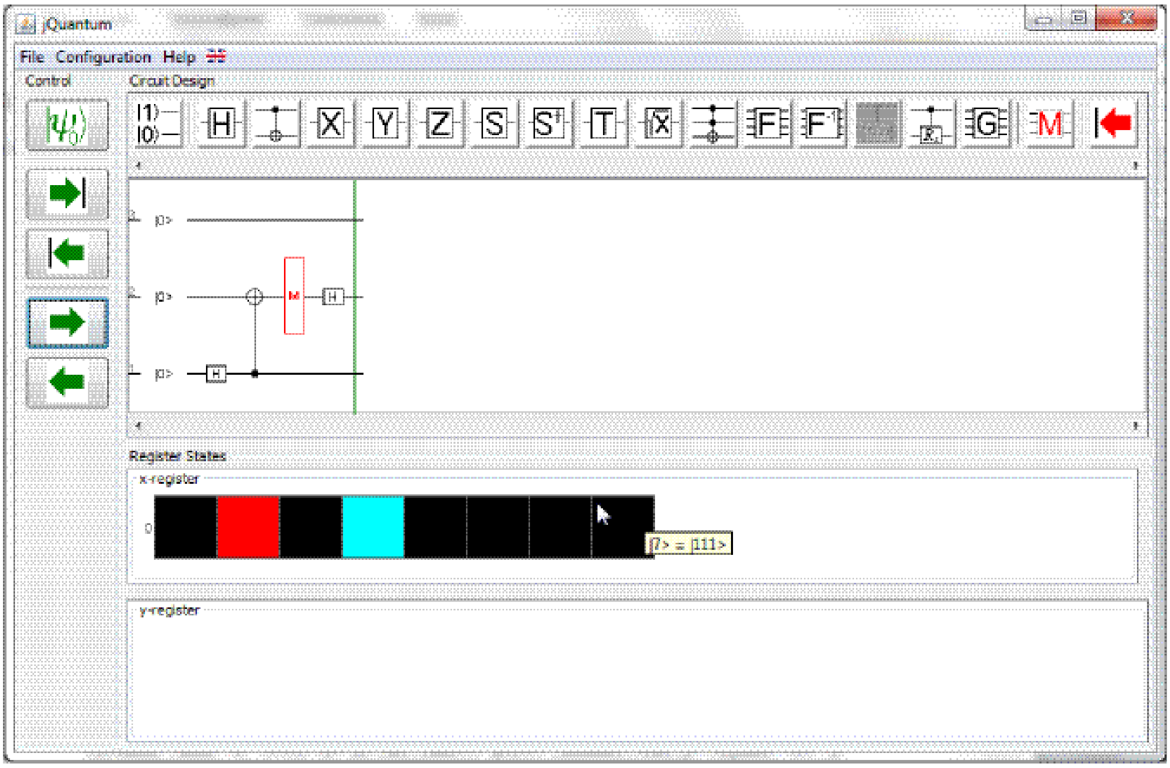
. . . .

. . . .

. . . .

REKENEN

Je stapt in deze les in de schoenen van een onderzoeker in de groep van Lieven Vandersypen. Je hebt een quantumcomputer tot je beschikking met maximaal 15 qubits en daar wil je graag mee gaan rekenen. De computer wordt gesimuleerd door het programma jQuantum, dat je kunt vinden op de website *http://www.quantumuniverse.nl/jquantum*. Als je het programma start, zie je ongeveer dit:



In het middelste deel van het venster zie je het *circuit* van poorten dat je tot nu toe gebouwd hebt. Je kunt het zien als je quantumsysteembord. De groene lijn geeft de positie in het algoritme aan die correspondeert met de weergegeven toestand in de *register states* onderin het vernster. Let erop dat in het circuit de qubits van onderaf genummerd worden.

4.

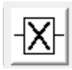
Links in beeld zie je het venster **control.** Hiermee kun je bepalen hoe je quantumcomputer is ingericht en waar deze is in het lopende algoritme. Door op de knop  te drukken, kun je instellen hoe groot je quantumcomputer is. Met de knoppen met pijltjes erop kun je door je circuit heen navigeren.

A. Initialiseer een circuit met één qubit in het x-register met behulp van de knop

Bovenin vind je het venster **circuit design**. Hiermee kun je de werking van je quantumcomputer bepalen door logische quantumpoorten toe te voegen en de beginstatus van je qubits te bepalen.

B. Gebruik de knop  om de beginwaarde van je qubit in te stellen op $|1\rangle$

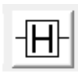
Onderin zie je de **register states.** Dit onderdeel geeft de status van de computer weer op de positie in je circuit waar de groene lijn zich bevindt. In het voorbeeld in de afbeelding hierboven zijn er 3 qubits, en dus zijn er $2^3 = 8$ mogelijke zuivere toestanden - dat wil zeggen: 8 toestanden zoals $|0\rangle|0\rangle|0\rangle$ waarmee superposities gevormd kunnen worden. Als een vakje rood (positief) of turquoise (negatief) is, heeft die toestand een coëfficiënt die ongelijk is aan 0. Een zwart vakje stelt dus een toestand voor waarvan de coëfficiënt wel gelijk is aan 0. Deze toestand komt dus niet voor in de superpositie. Als twee of meer vakjes tegelijk gekleurd zijn, bevindt het systeem zich in een superpositie van de toestanden die die vakjes voorstellen. Als er maar één vakje gekleurd is, bevindt het systeem zich in een zuivere toestand. Binnen deze module zullen we alleen werken met superposities van toestanden die een gelijke kans hebben om bij een meting gevonden te worden. We zullen dus alleen de coëfficiënten +1 (rood) en -1 (turquoise) tegenkomen. Als je met je muis boven een van de vakjes zweeft, zie je welke toestand dit vakje voorstelt.

C. Zet de quantumpoort , deze heet de X-poort, in je circuit en probeer uit wat dit doet met de quantumtoestand van je systeem. Leg uit.

....

....

....

D. Voeg aan je circuit de quantumpoort  toe. We noemen deze de Hadamardpoort. Zoek ook van deze poort uit wat hij doet met de spin van je elektronen. Let op dat je alle begintoestanden van je systeem probeert. Bekijk ook wat er gebeurt als je 2 Hadamardpoorten achter elkaar zet.

....

....

....

E. Beredeneer welk resultaat je zult krijgen als je in een circuit dat bestaat uit alleen een Hadamardpoort een meting verricht direct na deze poort. Leg uit.

....

....

F. Bepaal of je hypothese van opdracht 4E klopt door metingen uit te voeren.

Gebruik hiervoor de knop  in je circuit.

G. Ontwerp een circuit met een X- en een Hadamardpoort met als eindtoestand $|0\rangle - |1\rangle$. Teken hieronder wat je gedaan hebt en motiveer waarom juist dit circuit de gewenste toestand oplevert.

TWEE QUBITS

Voor een systeem van twee qubits wordt het lezen en interpreteren van de registertoestanden iets lastiger. De hokjes in het Register States-venster geven weer de vier zuivere toestanden aan ($|0\rangle|0\rangle$, $|0\rangle|1\rangle$, $|1\rangle|0\rangle$ en $|1\rangle|1\rangle$), en de kleuren van de hokjes de bijbehorende coëfficiënten. Er kunnen superposities voorkomen: in dat geval zijn verschillende hokjes gekleurd. Net als in opgave 3 kunnen sommige van die superposities worden gezien als product van superpositietoestanden van individuele qubits, en andere niet.

5.

A. Initialiseer een circuit met twee qubits. Teken in de onderstaande registers hoe de betreffende toestanden worden weergegeven door jQuantum.

Bovenste qubit	Onderste qubit	Registers
$\|1\rangle$	$\|0\rangle$	[ ] [ ] [ ] [ ]
$\|1\rangle$	$\|0\rangle + \|1\rangle$	[ ] [ ] [ ] [ ]
$\|0\rangle - \|1\rangle$	$\|1\rangle$	[ ] [ ] [ ] [ ]
$\|0\rangle + \|1\rangle$	$\|0\rangle + \|1\rangle$	[ ] [ ] [ ] [ ]

B. Bepaal nu voor onderstaande registers wat de toestand van de qubits in je systeem is.

Registers	Qubit 1	Qubit 2
[+] [+] [ ] [ ]		
[ ] [+] [ ] [+]		
[ ] [ ] [+] [-]		
[+] [ ] [-] [ ]		

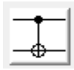
C. Zoals we in opdracht 3 gezien hebben, kun je niet alle registertoestanden ontbinden zoals de toestanden hierboven. Geef een toestand waarbij dit niet mogelijk is en leg uit waarom. Om wat voor toestand gaat het hier dus?

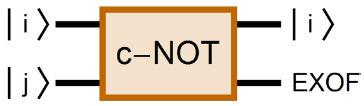
De toestand.................................. is niet als product van 1-qubit-toestanden

te schrijven. Dat betekent...

....

De volgende poort die we gaan behandelen is de controlled-NOT-poort, ofwel de c-NOT-poort.

Deze kun je in je quantumcomputer zetten met de knop .
Deze poort lijkt op de klassieke EXOF-poort. Als input heb je dus minstens twee qubits nodig. Schematisch kun je de werking van de c-NOT poort als volgt weergeven:

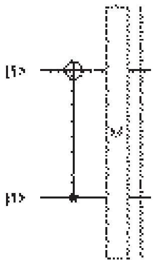
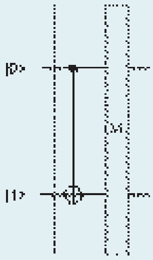
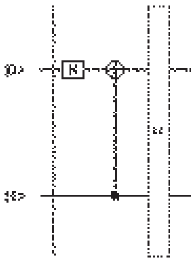
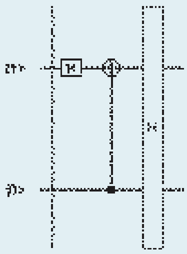


Dit houdt in dat de controle-qubit, die wordt aangegeven met het zwarte puntje, niet verandert. In het geval van bovenstaand voorbeeld is dat de bovenste. De uitkomst van de andere qubit is echter afhankelijk van de combinatie van beide input-qubits zoals is weergegeven in onderstaande tabel. Deze afhankelijkheid lijkt erg op die van de EXOF-poort uit de vorige module.

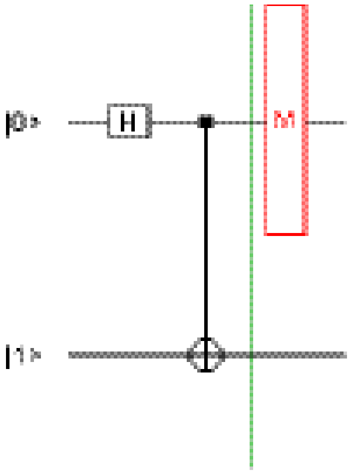
$\|i\rangle$	$\|j\rangle$	Output
$\|0\rangle$	$\|0\rangle$	$\|0\rangle$
$\|1\rangle$	$\|0\rangle$	$\|1\rangle$
$\|0\rangle$	$\|1\rangle$	$\|1\rangle$
$\|1\rangle$	$\|1\rangle$	$\|0\rangle$

6.

A. Vul de volgende tabel verder in door te redeneren of door de simulatie te gebruiken.

Circuit	Toestand bovenste qubit voor meting	Toestand onderste qubit voor meting	Resultaat meting
	$\lvert 0\rangle$	$\lvert 1\rangle$	$\lvert 0\rangle$ $\lvert 1\rangle$
			
			
			

B. Beredeneer waardoor je voor onderstaand circuit niet simpelweg de bovenstaande tabel kunt invullen. Geef daarvoor eerst aan wat de toestand van het gehele systeem is en gebruik in je uitleg de term *verstrengeling*.



. . . .

. . . .

. . . .

C. Bouw het circuit uit de vorige vraag na en voer het 10 keer uit. Noteer telkens de toestand van het systeem na een meting.

. . . .

. . . .

D. Waardoor verandert de toestand van qubit 1 als je een meting doet aan de toestand van qubit 2 en andersom?

. . . .

. . . .

EEN QUANTUMMUNTJE OPGOOIEN

We gaan nu een circuit bouwen waarmee een quantumcomputer in minder stappen dan een klassieke computer dezelfde berekening kan uitvoeren. We gaan met behulp van onze elektronen bekijken of een functie *constant* is of *gebalanceerd*. Je kunt dit vergelijken met bekijken of een munt eerlijk is, en dus een kopzijde en een muntzijde heeft, of oneerlijk is, dus aan beide zijden hetzelfde plaatje laat zien. Als er namelijk altijd hetzelfde uit je toss komt, is je munt constant. Als je een gelijke kans hebt om kop of munt ($|0\rangle$ of $|1\rangle$) te krijgen, is je munt gebalanceerd. In een klassiek scenario moet je minstens 2 keer meten om te zien of je munt eerlijk is. Je moet namelijk beide kanten van de munt een keer bekijken. Binnen een quantumcomputer hoef je echter maar *één* keer te meten om beide kanten van het muntje te kunnen bekijken. Je moet dan wel een geschikt algoritme gebruiken.

7.

A. Welke van de onderstaande functies zijn gebalanceerd, en welke zijn constant?

input	f_1	f_2	f_3	f_4
$\|0\rangle$ (kant 1)	$\|0\rangle$ (kop)	$\|1\rangle$ (munt)	$\|0\rangle$ (kop)	$\|1\rangle$ (munt)
$\|1\rangle$ (kant 2)	$\|0\rangle$ (kop)	$\|1\rangle$ (munt)	$\|1\rangle$ (munt)	$\|0\rangle$ (kop)

f_1: gebalanceerd/constant
f_2: gebalanceerd/constant
f_3: gebalanceerd/constant
f_4: gebalanceerd/constant

Je wil een circuit bouwen dat in één meting bepaalt of een functie gebalanceerd of constant is. Afhankelijk van wat de onbekende functie doet, wil je een $|0\rangle$ of een $|1\rangle$ meten. Er moet dus een $|0\rangle$ en een $|1\rangle$ tegelijk als input ingevoerd worden, waarna je uit de output wil kunnen opmaken of de functie die je hebt getest gebalanceerd of constant is.

B. Beredeneer welk type toestand je nodig hebt als input.

....

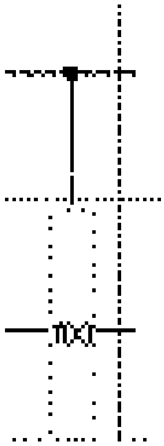
....

C. Welke van de eerder behandelde quantumpoorten zou je kunnen gebruiken om deze toestand te creëren? Leg uit.

....

....

Bij de quantumversie van de functie f heb je een qubit nodig voor de input in het x-register, en een qubit voor de output in het y-register. De input van de functie f(x) wordt in het circuit hieronder dus geleverd door de bovenste (x)-qubit. De output wordt vervolgens in de onderste qubit doorgevoerd.



De output bestaat niet simpelweg uit de functiewaarde. De waarde die de outputqubit heeft vóór toepassing van de functie heeft ook invloed op de uiteindelijke waarde van de output-qubit. Dit gaat weer volgens de logica van de EXOF-poort: als de waarde van de functieoutput dus hetzelfde is als de vooraf ingestelde waarde van de outputqubit, zal de functiepoort een |o> geven. Als deze waardes van elkaar verschillen zal de functiepoort een $|1\rangle$ geven.

D. Bepaal voor de vier mogelijke combinaties van x- en y-qubit voor f_1 t/m f_4 wat de waarde van de beide qubits is na toepassing van de functie. Denk hierbij ook aan het EXOF-gedrag van de output. We geven steeds de x-qubit eerst en de y-qubit daarna, dus een notatie als $|0\rangle|1\rangle$ betekent dat de x-qubit (de inputqubit, boven in de figuur) de waarde $|0\rangle$ heeft, en de y-qubit (de outputqubit, onder in de figuur) de waarde $|1\rangle$.

f_1 : $|0\rangle|0\rangle \to \ldots\ldots\ldots$ $|0\rangle|1\rangle \to \ldots\ldots\ldots$ $|1\rangle|0\rangle \to \ldots\ldots\ldots$ $|1\rangle|1\rangle \to \ldots\ldots\ldots$

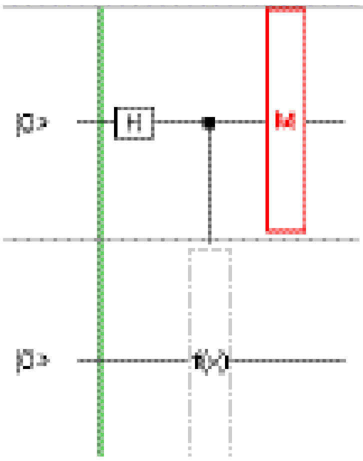
f_2 : $|0\rangle|0\rangle \to \ldots\ldots\ldots$ $|0\rangle|1\rangle \to \ldots\ldots\ldots$ $|1\rangle|0\rangle \to \ldots\ldots\ldots$ $|1\rangle|1\rangle \to \ldots\ldots\ldots$

f_3 : $|0\rangle|0\rangle \to \ldots\ldots\ldots$ $|0\rangle|1\rangle \to \ldots\ldots\ldots$ $|1\rangle|0\rangle \to \ldots\ldots\ldots$ $|1\rangle|1\rangle \to \ldots\ldots\ldots$

f_4 : $|0\rangle|0\rangle \to \ldots\ldots\ldots$ $|0\rangle|1\rangle \to \ldots\ldots\ldots$ $|1\rangle|0\rangle \to \ldots\ldots\ldots$ $|1\rangle|1\rangle \to \ldots\ldots\ldots$

Je zou misschien denken dat je de onderste qubit moet meten om te kijken wat voor functie f(x) is. Dit blijkt echter niet het geval, zoals je in de volgende opgaven zult ontdekken.

E. Beredeneer wat de mogelijke uitkomsten zijn van het circuit hieronder voor $f(x) = f_1$ t/m f_4. Leg uit en schrijf hierbij ook de toestand op vóór de meting. Let op: je hoeft hiervoor dus geen circuit te bouwen, je hoeft alleen maar te bedenken welke mogelijke uitkomsten er zijn. Schrijf hiervoor de toestand die het systeem heeft voordat de functie toegepast wordt helemaal uit, zoals je in opdracht 3 en 5 hebt gedaan. Pas daarna de functies toe op alle termen van je uitdrukking met behulp van je antwoord bij de vorige opdracht. Schrijf de eindtoestand indien mogelijk weer als een product van toestanden voor de afzonderlijke deeltjes.



De toestand vóór toepassing van de functies is:

. . . .

De toestand na toepassing van de functies en vóór de meting is:

f_1: . . . .

f_2: . . . .

f_3: . . . .

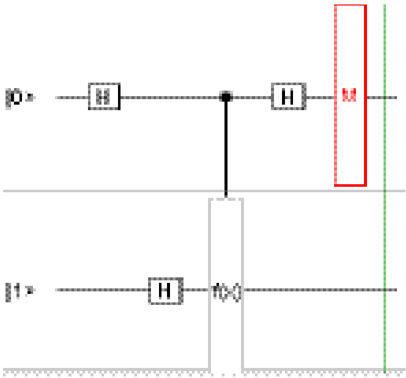
f_4: . . . .

F. Beredeneer dat in het bovenstaande circuit de meting je niet eenduidig vertelt of de gekozen functie constant of gebalanceerd is. Hoe zou je dit kunnen veranderen?

. . . .

. . . .

G. Herhaal opdracht 7E voor het circuit hieronder. Welke uitkomst meet je als f(x) gebalanceerd is? Welke uitkomst meet je als f(x) constant is? Motiveer je antwoord.



De toestand vóór toepassing van de functies is:

....

De toestand na toepassing van de laatste Hadamardpoort en vóór de meting is:

f_1: ....

f_2: ....

f_3: ....

f_4: ....

H. Kun je met dit nieuwe circuit in één meting bepalen of de functie f(x) gebalanceerd of constant is?

....

I. Download de 4 circuits van *http://www.quantumuniverse.nl/jquantum* en vind uit of de functies gebalanceerd of constant zijn. Leg uit.

Circuit 1: ....

Circuit 2: ....

Circuit 3: ....

Circuit 4: ....

8.
Beschrijf in je eigen woorden waardoor een quantumcomputer efficiënter kan rekenen dan een klassieke computer.

....

....

....