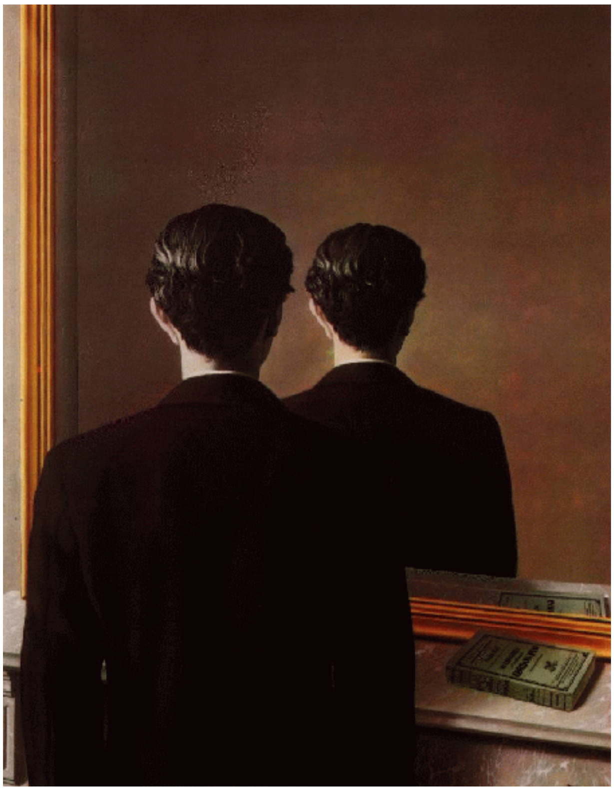
De Praktijk
natuurwetenschappelijk onderwijs

TOPWIS POINCARÉ

syllabus



De Praktijk, natuurwetenschappelijk onderwijs BV
Mauritskade 57, 1092 AD, Amsterdam, T 020 525 7688, F 020 525 7242, info@praktijk.nu, www.praktijk.nu
Btw-ID NL820923151B01, KvK Amsterdam 34137295, ABN AMRO 54.38.14.580

Inhoudsopgave

Colofon

De lessenserie TopWis Poincaré is ontwikkeld door De Praktijk:

auteurs: Jacobien Carstens en Sebas Eliëns

begeleider: Yuri Matteman

eindredactie: Alex Verkade

Meer informatie: www.praktijk.nu of neem contact op via info@praktijk.nu, 020 5257688

Ontwikkeling van TopWis Poincaré is uitgevoerd in opdracht van Geometry and Quantum Theory (GQT) cluster, Stichting Compositio Mathematica en its academy.

BELANGRIJK

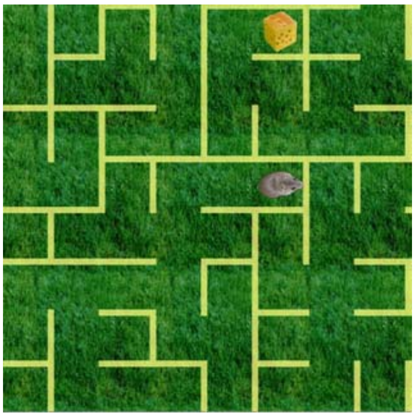
Het lesmateriaal is niet geschreven om leerlingen zelfstandig mee aan de slag te laten gaan. Er is actieve inhoudelijke begeleiding nodig. Het is de bedoeling dat de lessen gegeven worden door iemand met voldoende kennis van topologie.

1. Inleiding

In spelletjes zoals Pacman zijn tegenoverliggende zijden van je computerscherm virtueel aan elkaar geplakt. Als Pacman het scherm links verlaat, verschijnt hij rechts weer op dezelfde hoogte. Idem dito voor boven en onder. Op *www.geometrygames.org* vind je een programma *Torus Games* met spelletjes waarbij het beeldscherm op verschillende manieren is `geplakt'.

Opgave 1.

a. Speel een aantal Torus Games. Stel *torus* in onder *topologie*.

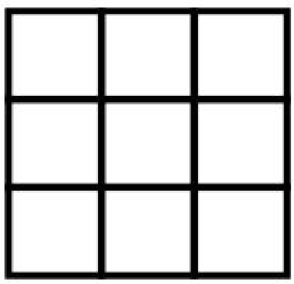


Screenshot uit het spel Maze van de Torus Games. Kun je de muis naar de kaas leiden?

b. Op http://www.jacobiencarstens.com/games1.htm vind je het bekende spelletje Snake. Maar je kunt nu verschillende oppervlakken kiezen. Speel Snake op de torus.

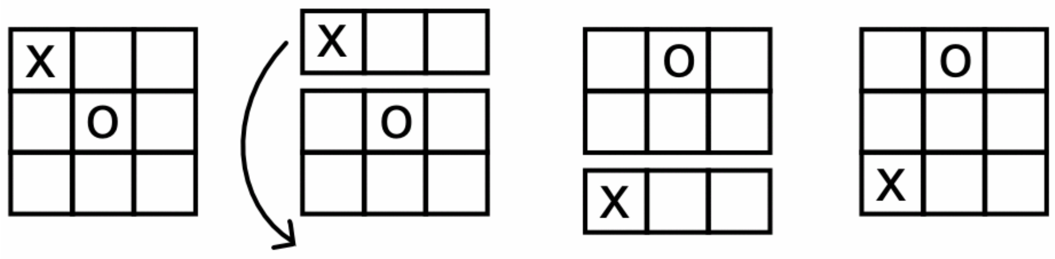
Boter-kaas-en-eieren

We kunnen boter-kaas-en-eieren ook op papier op een torus spelen. Dat wil zeggen dat we de tegenoverliggende zijden in gedachten aan elkaar plakken. Een lijn die rechts het bord uit gaat, komt op dezelfde hoogte links het bord weer in.



Leeg boter-kaas-en-eieren speelbord.

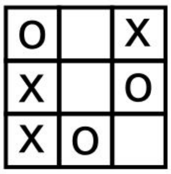
We kunnen het speelveld op verschillende manieren bekijken, door te knippen en te plakken. Als we de bovenste rij losknippen, kunnen we deze verplaatsen naar de onderkant van het veld. De bovenkant en onderkant waren immers aan elkaar geplakt. Zo kunnen we ook de rechter kolom naar de linkerzijde verplaatsen.

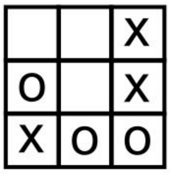


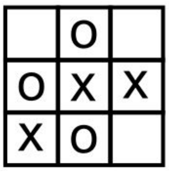
Bovenste rij naar onderkant verplaatsen. Het eerste en laatste plaatje geven dezelfde spelsituatie weer.

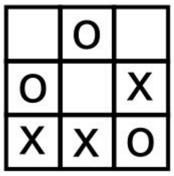
Opgave 2.

Geef van de volgende spelsituaties aan welke speler zou hebben gewonnen. Het kan ook zijn dat geen van de spelers gewonnen heeft, geef dit ook aan.

a) 

b) 

c) 

d) 

Opgave 3.

Speel boter-kaas-en-eieren op papier op een torus. Doe dit een aantal keer. Hou bij wie er wint en wie begonnen is.

Opgave 4.

Beantwoord de volgende vragen over boter–kaas-en-eieren op een torus. Beargumenteer je antwoord.

a. Hoeveel echt verschillende keuzes heeft een beginnende speler voor zijn eerste zet bij een normaal spelletje boter-kaas-en-eieren? (dus zonder aan elkaar geplakte randen)

b. Hoeveel echt verschillende keuzes heeft de beginnende speler voor zijn eerste zet als de randen, zoals hierboven, wel geplakt zijn?

c. Heeft de beginnende speler een manier om altijd te winnen (een winnende strategie) bij boter-kaas-en-eieren op een torus? Zo ja, beschrijf deze.

Topologie

Het onderwerp van deze lesmodule is **topologie,** een wiskundig vakgebied waarvan het ontstaan wel aan Henri Poincaré wordt toegedicht. Het *Poincaré vermoeden*, afkomstig van zijn baanbrekende werk, was een van de belangrijkste topologische problemen van de 20e eeuw. Het bewijs van het vermoeden van Poincaré in 2002/2003 vormde de aanleiding voor deze module. Tegenwoordig is topologie een groot, belangrijk en invloedrijk deel van de wiskunde dat toepassingen en inzichten biedt ver buiten de wiskunde. Deze lessenserie vormt een introductie.

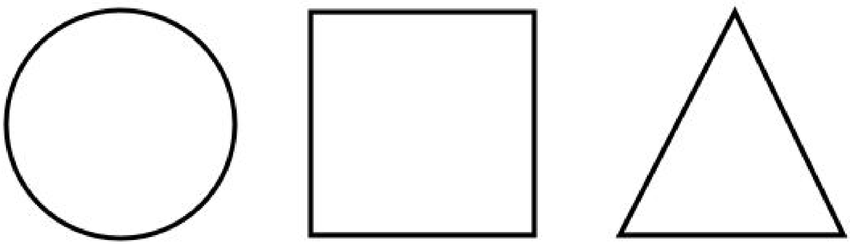
De wereld classificeren

Mensen verdelen de wereld constant in verschillende klassen. Ga maar na: de CD's in de CD-winkel zijn gerangschikt naar genre, of soms op alfabetische volgorde van de artiest. Als leerling zit je in een bepaalde klas, bijvoorbeeld 6v-b. Boeken zijn onderverdeeld in romans, poëzie, kookboeken, reisverhalen, non-fictie, etc.

Dezelfde dingen worden niet altijd op dezelfde manier ingedeeld. Soms is de onderverdeling grover dan anders. Het toilet in een restaurant verdeelt mensen in mannen en vrouwen, bij gewichtheffen worden de deelnemers daarnaast ook nog ingedeeld in gewichtsklassen.

Het vak topologie is een onderdeel van de wiskunde waarin meetkundige objecten in verschillende klassen worden onderverdeeld. Voorbeelden van meetkundige objecten zijn cirkels, driehoeken en andere figuren in het vlak. Maar ook het oppervlak van een bol, een gevulde bol, of het oppervlak van een donut zijn voorbeelden van meetkundige objecten.

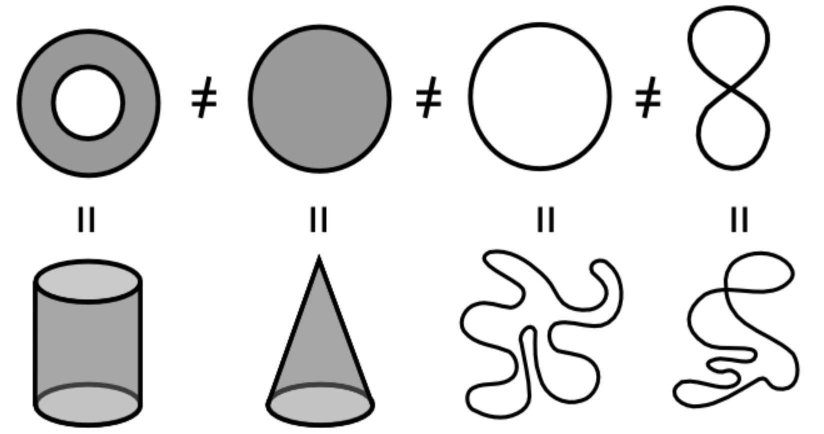
We delen de meetkundige objecten topologisch in, door alleen de "topologisch relevante eigenschappen" van de objecten te beschouwen en alle "topologisch irrelevante" eigenschappen te negeren. Grofweg betekent dat, *dat we alle informatie over afstand vergeten*. Je mag objecten uitrekken en vervormen zonder dat er topologisch iets verandert, maar knippen of perforeren mag niet. Zo komen objecten die bepaalde fundamentele eigenschappen met elkaar delen, terecht in dezelfde topologische klasse.



Drie verschillende meetkundige objecten in dezelfde topologische klasse

Homeomorf

Meetkundige objecten in dezelfde topologische klasse zien we als gelijk. De wiskundige term hiervoor is **homeomorf**. Voorbeelden van topologische (niet-)homeomorfe objecten zijn:



Om te oefenen met homeomorfie, gaan we kijken naar vormen uit het dagelijks leven.

Opgave 5.

a. Deel de letters van het alfabet in op homeomorfie (lettertype Arial):

A B C D E F G H I J K
L M N O P Q R S T U
V W X Y Z

b. Deel ook de getallen in. Heb je vormen gevonden of passen ze allemaal in één "lettergroep"?

1 2 3 4 5 6 7 8 9

c. Beschrijf hoe je de bovenstaande vormen indeelt. Geef je eigen methode.

Ruimte

Het woord *ruimte* wordt waarschijnlijk het meest terugkerende woord in de lessen van TopWis Poincaré. We gebruiken het als verzamelnaam voor meetkundige objecten die we topologisch bekijken. Dat zijn onder andere punten, lijnen, een vlak, cirkels en oppervlakken. Maar we zullen ook naar drie- en zelfs vierdimensionale ruimtes kijken.

Henri Poincaré

Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) was een briljante Franse wiskundige, natuurkundige en filosoof. Al op jonge leeftijd viel zijn talent op, één van zijn docenten vertelde zijn moeder dat hij een echt "wiskundebeest" was en een groot wiskundige zou worden. Die docent bleek een vooruitziende blik te hebben.

J. H. Poincaré

Op 20 jarige leeftijd publiceerde Poincaré zijn eerste wiskunde-artikel. Hij ontdekte nieuwe verbanden tussen analyse en meetkunde. Het is verrassend dat Poincaré de eerste was die deze theorie ontwikkelde, en niet de Duitse wiskundige Felix Klein. Klein was namelijk goed bekend met het werk van Bernhard Riemann, een derde geniale wiskundige, terwijl Poincaré nog nooit iets van hem had gelezen. En tot Kleins frustratie bewees Poincaré in ongekend tempo het ene na het andere resultaat – met ideeën die voort leken te bouwen op het werk van Riemann. Klein en Poincaré voerden een verhitte briefwisseling, zeg maar gerust briefruzie, wat er uiteindelijk toe leidde dat ze allebei overspannen raakten.

Poincaré was een zeer veelzijdig denker, maar ook nogal chaotisch. Hij heeft binnen bijna elk vakgebied van de wiskunde belangrijke bijdragen geleverd, een uitstapje gemaakt naar mijnbouw en veel betekend voor natuurkunde. Zijn manier van denken is door de psycholoog Toulouse als volgt beschreven: "Hij negeerde details en sprong van idee naar idee. De feiten voortgekomen uit elk idee kwamen dan samen en losten het probleem op."

Dat lijkt een behoorlijk rake analyse. Zo zei Poincaré zelf over een van zijn baanbrekende ,ontdekkingen: "Toen we waren aangekomen in Coutances namen we de tijd om een ritje te maken. Op het moment dat ik instapte, kwam het idee tot me, zonder enige aankondiging in mijn eerdere gedachten, dat de transformaties die ik had gebruikt om Fuchsische functies te definiëren identiek waren aan die van de niet-Euclidische meetkunde."

De Poincaréschijf, het door Poincaré bedachte model voor niet-Euclidische meetkunde

In 1904 formuleerde Henri Poincaré een vermoeden, dat later beroemd zou worden als "het vermoeden van Poincaré". Het is een vraag over driedimensionale ruimtes. Poincaré was een van de eersten die zulke ruimtes onderzocht. Hij legde de basis voor de moderne topologie.

De laatste les van deze module is gewijd aan het vermoeden van Poincaré.

Oppervlakken

Voorbeelden van ruimtes zijn de oppervlakken van voorwerpen uit het leven van alledag, althans de wiskundige abstractie daarvan. Bijvoorbeeld:

Hier kunnen we een topologische indeling van maken. We zullen gaan zoeken naar een complete verzameling van *alle* verschillende soorten oppervlakken. Onze vraag is dus: “Welke oppervlakken bestaan er?”

Opgave 6.

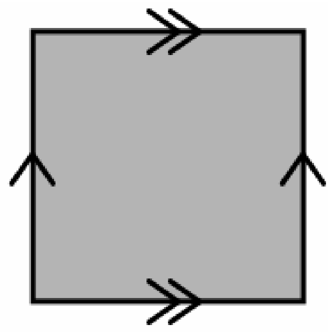
a. Hoe zou jij de oppervlakken van een koffiekopje, een voetbal, een rugbybal en een donut topologisch indelen? (zie bovenstaande plaatje)

b. Maak een lijst van vijf objecten om je heen die homeomorf zijn met het oppervlak van een bol en een lijst met vijf objecten die homeomorf zijn met het oppervlak van een donut.

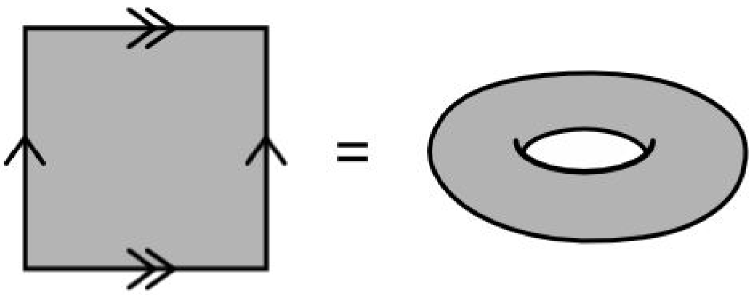
Het verband tussen oppervlakken en boter-kaas-en-eieren

We kunnen het computerscherm bij Pacman of de Torus Games, of het speelbord van boter-kaas-en-eieren beschouwen als een topologische ruimte. Al deze spellen spelen zich af op een vierkant waarvan we in gedachten de tegenoverliggende zijden aan elkaar hebben geplakt. Maar wat zou er gebeuren als we “in gedachten” weglaten en de zijden echt gaan plakken?

Bekijk de volgende ruimte:



Het plakken van de zijden van dit vierkant is aangegeven met (dubbele) pijlen. Dit is als ruimte gelijk aan het oppervlak van een donut of fietsband:



Torus (T^2)

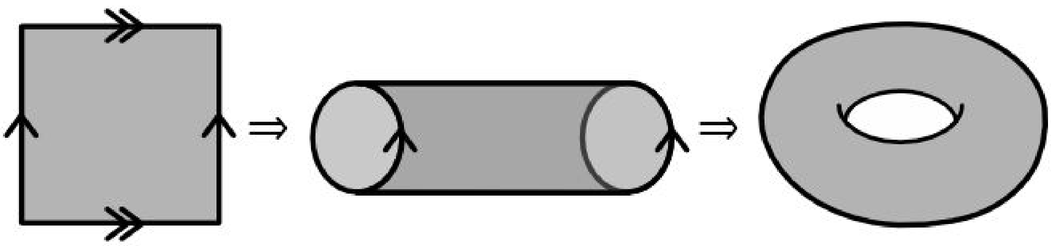
Dit oppervlak noemen we de **torus** en korten we af als T^2.

Opgave 7.

Pak een vierkant stuk papier:

I. Plak twee tegenoverliggende zijden aan elkaar zodat je een cilinder overhoudt.

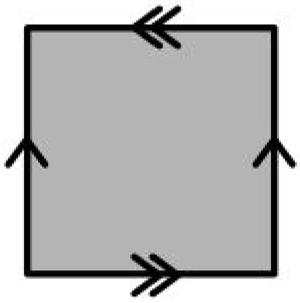
II. Kun je zien dat als je ook de twee andere zijden op elkaar zou plakken er een fietsband uit komt? Lukt dit met papier? Zou dit met "rekbaar papier" of rubber lukken?



Illustratie van het plakken van een torus.

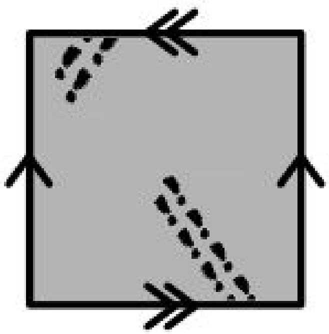
De fles van Klein

Je kunt je nu afvragen wat er gebeurt als je de zijden van een vierkant op een andere manier op elkaar plakt. Bijvoorbeeld zoals aangegeven in het volgende plaatje:



Fles van Klein (K^2)

Dit oppervlak noemen we de **fles van Klein** aangegeven met K^2**.** Als je links het vierkant uit loopt kom je dus rechts het vierkant op dezelfde hoogte binnen. Maar als je linksboven het vierkant naar boven uitloopt kom je *rechts*onder het vierkant weer in. Ook de hoek waaronder je het vierkant uitloopt, wordt gespiegeld.



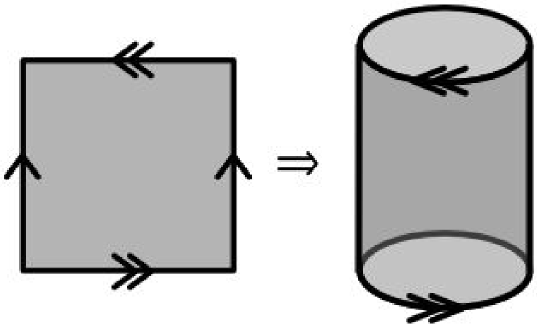
Opgave 8.

Speel Torus Games en Snake op de fles van Klein. (zie opgave 1.)

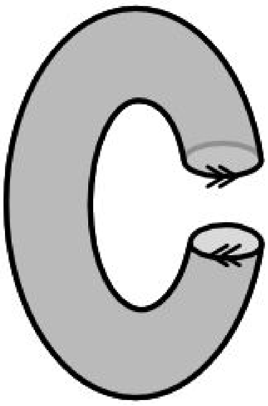
Opgave 9.

Herhaal de opgaven over boter-kaas-en-eieren (opgaven 2-4) met een speelbord dat is geplakt als de fles van Klein.

Kunnen we de fles van Klein ook *echt* plakken? We kunnen in elk geval, net als bij de torus, eerst een cilinder plakken:



Als we nu proberen de randcirkels op elkaar te plakken komt de oriëntatie van de pijltjes niet overeen. Het lijkt er op dat de fles van Klein niet in drie dimensies als oppervlak bestaat!



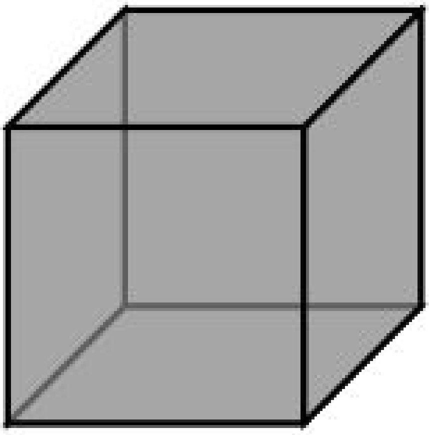
Opgave 10.

Probeer in gedachte de fles van Klein te plakken uit een vierkant stuk rubber. Maak weer eerst een cilinder. De laatste randcirkels op elkaar plakken lukt niet. Lukt dit wel als je ergens een gat in het oppervlak mag maken? Zo ja, maak een tekening.

Ruimtes met drie dimensies, de vorm van het universum

Het plakken van een vierkant kan een ruimte opleveren die we in drie dimensies voor kunnen stellen; de torus. Maar als we de randen iets anders plakken krijgen we de fles van Klein, een ruimte die niet zonder meer voor te stellen is in drie dimensies. Toch bestaat de ruimte! We kunnen er spelletjes op spelen en als we het plakken abstract houden is er niks mis met het model van een vierkant met op elkaar geplakte zijden. In vier dimensies zouden we het plakken wel echt kunnen uitvoeren.

Op dezelfde manier kunnen we ook driedimensionale ruimtes maken door de zijden van een kubus in gedachten op elkaar te plakken. Het plakken is nu natuurlijk *alleen* maar abstract te doen. We zouden *minstens* vier dimensies nodig hebben om het plakken echt te realiseren.



Door de zijvlakken van een kubus in gedachten op elkaar te plakken kunnen we vreemde driedimensionale ruimtes maken

Opgave 11.

Heb je wel eens nagedacht over de vorm van het universum? Denk je dat het eindig of oneindig is? Beschrijf kort wat je denkt/weet over dit onderwerp.

Opgave 12.

Geef een voorbeeld van een *oppervlak* dat eindig is maar toch geen rand heeft.

Opgave 13.

We gaan twee cirkelschrijven uit een vlak knippen en vervolgens op elkaar plakken.

a. Teken een vierkant en daarin twee losse cirkels. Stel je voor dat we de twee omsloten cirkelschrijven hebben uitgeknipt uit het vierkante stuk vlak.
b. Teken op de ene cirkel een pijl die met de klok mee wijst en op de andere cirkel een pijl die tegen de klok in wijst. De pijlen geven aan hoe de cirkels op elkaar geplakt moeten worden
c. Kun je in drie dimensies door het vlak te buigen en uit te rekken (topologisch te vervormen) de cirkels daadwerkelijk op elkaar plakken? Zo ja, maak een tekening.
d. En als we de pijlen op de cirkels allebei met de klok mee tekenen, lukt het dan?

Opgave 14.

Zoek het begrip *wormhole* op.

a. Leg uit wat een wormhole is.
b. Teken hierbij een "tweedimensionaal *wormhole*"
c. Beschrijf een driedimensionale ruimte met een *wormhole*.

Een toepassing van topologie

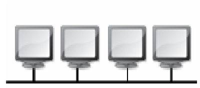
De vraag “Welke oppervlakken bestaan er?” is een voorbeeld van een zuiver wiskundige vraag. Het praktisch nut is niet direct duidelijk, maar toch is het interessant om over na te denken. Vaak leiden zuiver wiskundige vragen tot wiskundige stellingen die later ineens heel bruikbaar blijken voor een bepaald praktisch probleem. We zullen niet zo veel praktische toepassingen behandelen in deze module. Maar om toch een idee te geven waarvoor topologie handig kan zijn, maken we een kort uitstapje naar de wetenschap van netwerken.

Netwerken bestaan uit punten en verbindingslijnen. Denk bijvoorbeeld aan computernetwerken. De punten zijn dan de computers, de verbindingslijnen staan voor de verbindingen die de computers met elkaar hebben. Die verbindingen kunnen fysiek bestaan in de vorm van kabels, maar ook als Wi-Fi of iets dergelijks. Je kunt ook andere onderdelen van de wereld zien als netwerken, bijvoorbeeld wegen, goederenstromen, hersenen, noem maar op.

Het is voor bijvoorbeeld de snelheid en veiligheid van computernetwerken alleen van belang welke structuur het netwerk heeft, niet hoe de verbindingskabels precies lopen. *We willen de netwerken topologisch benaderen*. De manier waarop computers in een netwerk met elkaar verbonden zijn noemt men dan ook wel een **netwerktopologie**.


Mesh-netwerk


Sternetwerk


Busstructuur


Ringstructuur

Voorbeelden van veel gebruikte netwerktopologieën

Afhankelijk van het doel van het netwerk is juist de ene of de andere netwerktopologie geschikter.

Opgave 15.

Het Mesh-netwerk is van de bovenstaande netwerken het best bestand tegen het uitvallen van een knooppunt.

a. Stel, je zou 50 computers van een mediatheek met kabels aan elkaar willen verbinden in de vorm van een Mesh-netwerk. Hoeveel kabels heb je dan nodig?

b. Zou jij de computers in de mediatheek op deze manier verbinden? Waarom (niet)?

c. Stel: het belangrijkste in de mediatheek is dat iedereen de berichten van de mediathecaris ontvangt. Welke netwerktopologie zou je gebruiken? Waarom?

d. Noem een nadeel van deze structuur.

Opgave 16.

Lees de volgende twee problemen en beantwoord de vragen.

1. Er staan vijf zendmasten op de vijf hoekpunten van een regelmatige vijfhoek. Een van de zendmasten zend een signaal uit op $t = 0$. Op $t = 1$ s ontvangen de twee dichtstbijzijnde masten het signaal. Wanneer ontvangen de twee anderen het signaal?

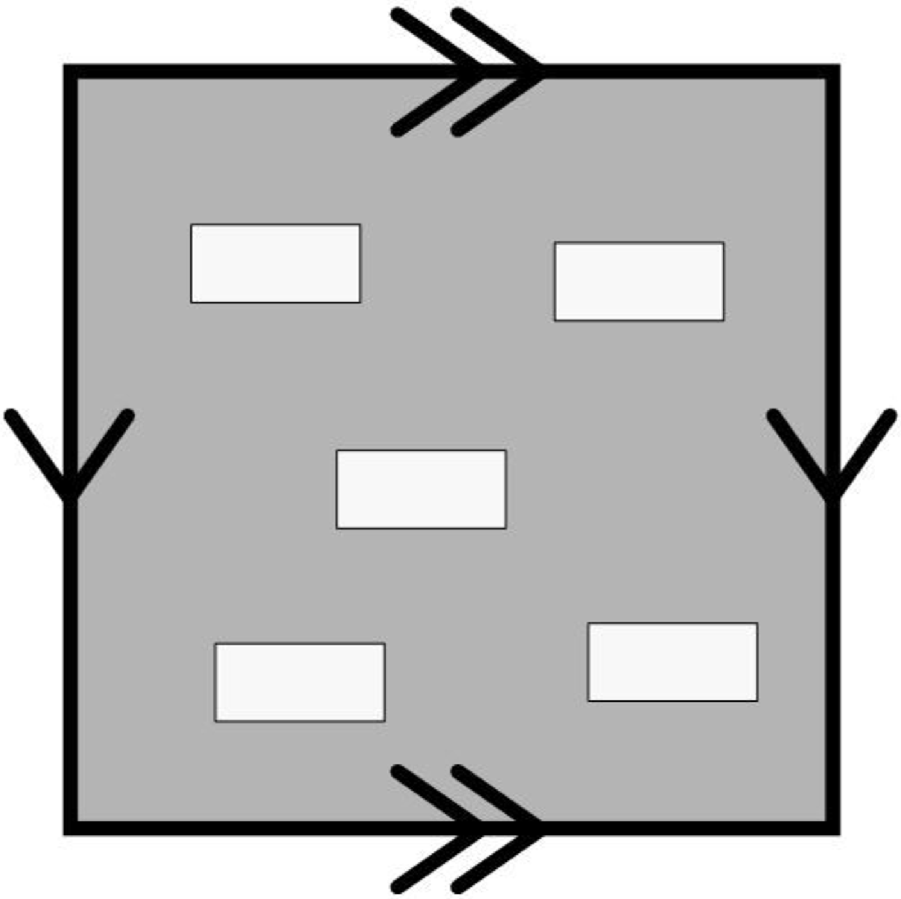
2.

Op een bedrijventerrein staan vijf magazijnen. Die moeten onderling allemaal met een spoorbaantje worden verbonden. Uit veiligheidsoverwegingen zijn kruisingen en splitsingen niet toegestaan. Is er een viaduct nodig?

a. Welke van de twee boven staande problemen is meetkundig en welke topologisch?

b. Maak een model voor de problemen: een schematische tekening met de juiste gegevens. Kun je de problemen oplossen?

c. Beantwoord vraag 2 nog een keer, maar stel je nu voor dat de magazijnen op een torus staan (zie onderstaande plaatje). Heb je nu een viaduct nodig?



2. Ruimte

In deze les gaan we verder in op het begrip ruimte. Vaak stellen we ons ruimtes voor in een omhullende ruimte, bijvoorbeeld een cirkel in het vlak, of de bolschil in de driedimensionale ruimte. Dit noemen we een inbedding. We zullen onderscheid maken tussen de intrinsieke eigenschappen van een ruimte en de eigenschappen die het gevolg zijn van de inbedding in een omhullende ruimte. Uiteindelijk zijn het de intrinsieke eigenschappen waarin we geïnteresseerd zijn. Het gebruik van bouwplaten maakt het gemakkelijker de intrinsieke eigenschappen te onderzoeken. We richten ons voorlopig vooral op oppervlakken.

De Möbiusband

De Möbiusband is een van de bekendere wiskundige ruimtes. De Nederlandse kunstenaar M.C. Escher maakte er een beroemde prent van, het bedrijf United Nude ontwierp een schoen naar model van de Möbiusband.

De Möbiusband (links) en de Möbiusschoen (rechts)

Je kunt een Möbiusband zelf maken van een vel papier door twee tegenoverliggende kanten met een halve slag aan elkaar te plakken. De Möbiusband heeft een aantal bijzondere eigenschappen.

Opgave 1.

a. Knip een dunne lange strook papier.
b. Plak de korte einden aan elkaar na één kant een halve slag te hebben gedraaid. Je hebt een Möbiusband!
c. Hoeveel randen heeft de Möbiusband?
d. Hoeveel kanten heeft de Möbiusband, één of twee? Dat wil zeggen, als je als mier op het oppervlak zou lopen is er dan een kant waar je niet kunt komen (zonder over de rand te klauteren)?
e. Neem een zelfde strook papier en plak een cilinder door de halve slag achterwege te laten. Beantwoord vraag c. en d. voor de cilinder.
f. Knip de Möbiusband langs de middellijn. Hoeveel randen heeft het oppervlak dat je overhoudt.

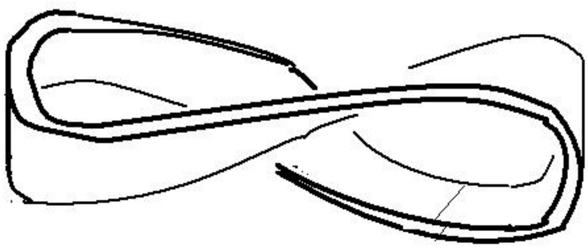
g. Hieronder staan bouwplaten van de cilinder en van de Möbiusband. Teken de bouwplaat van de ruimte die je bij f. hebt gekregen door de Möbiusband te knippen. Welke ruimte is het eigenlijk ?

De cilinder

De Möbiusband

Opgave 2.

Plak een dubbele Möbius band. Deze krijg je door twee stroken papier samen te nemen, een halve slag te draaien en vervolgens uiteinden op elkaar te plakken (zie illustratie).



a. Uit hoeveel losse delen bestaat deze ruimte?

b. Hoeveel randen heeft de ruimte?

c. Hoeveel kanten heeft de ruimte?

d. Welke ruimte is dit?

Intrinsieke ruimte

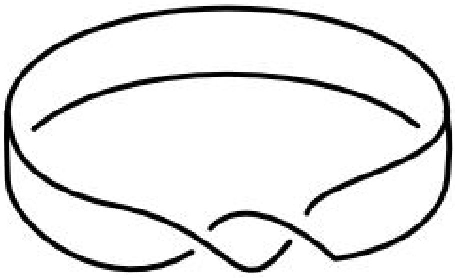
In 1884 schreef Edwin A. Abbott het boek *Flatland: A Romance of Many Dimensions* over een vlakke wereld. Als lezer volg je de avonturen van A Square, bewoner van dit merkwaardige Flatland. Flatland is een tweedimensionale wereld. Wij noemen dat een oppervlak. Maar A Square leeft *in* Flatland! Dat is dus anders dan *op* een oppervlak, zoals een mier bijvoorbeeld *op* een appel loopt. A Square is een tweedimensionaal wezen.

De omslag van Flatland (links) en A Square (rechts)

We noemen de eigenschappen van een ruimte **intrinsiek**, als ze te onderzoeken zouden zijn door een bewoner van die ruimte. A Square kan van het oppervlak (Flatland) waarin hij leeft alleen de intrinsieke eigenschappen zien.

In drie dimensies kunnen we ons hetzelfde Flatland vaak op verschillende manieren voorstellen. De ene ruimte voorstellen in een andere, omhullende ruimte noemen we **inbedden**. Als we bijvoorbeeld een oppervlak "voor ons zien" in de driedimensionale ruimte, zeggen we wiskundig dat het oppervlak is ingebed in die ruimte. Dat inbedden introduceert soms eigenschappen die niet echt bij de oorspronkelijke ruimte horen. Een cilinder kan zich bijvoorbeeld in oneindig veel verschillende posities in een grote kubus bevinden.

Aan oppervlakken of andere ruimtes denken we vaak als een deel van een grotere ruimte.



Cilinder met een volledige draai

We zijn alleen geïnteresseerd in de intrinsieke eigenschappen. Andere eigenschappen noemen we **extrinsiek**. Om de intrinsieke eigenschappen te bepalen is soms wat verbeeldingskracht nodig; bijvoorbeeld als je je voor wil stellen dat je *in* een lijn leeft (als punt bijvoorbeeld), of *in* een oppervlak (als *Flatlander*).

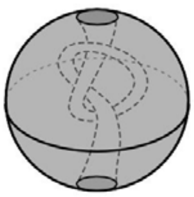
Met een bouwplaat van de ruimte is het vaak makkelijk om de intrinsieke eigenschappen van de extrinsieke eigenschappen te scheiden. Zo kunnen we de cilinder met volledige draai openknippen en de bouwplaat maken. Dan zie je eenvoudig dat deze cilinder homeomorf is met de 'gewone' cilinder.

Opgave 3.

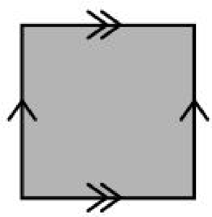
Hoeveel echt verschillende ruimtes zijn er te maken door de twee korte, overliggende zijdes van een strook papier op elkaar te plakken?

Opgave 4.

Welke van de volgende plaatjes stellen dezelfde ruimte voor?

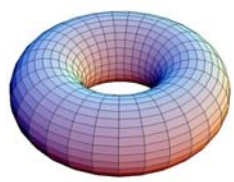


a.



b.

c.

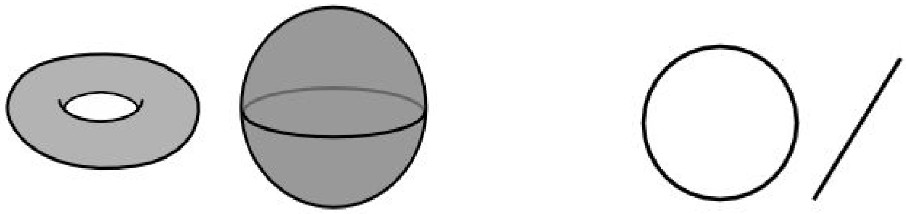


d.

Samenhang

Een belangrijke intrinsieke eigenschap is **samenhang**. We noemen een ruimte **samenhangend** als de ruimte “uit één stuk bestaat”. Een manier om dit te testen, is kijken of je als bewoner vanaf elk punt in de ruimte naar elk ander punt van de ruimte kunt lopen. Samenhang is dus een intrinsieke eigenschap.

Ruimtes die niet samenhangend zijn, bestaan altijd uit meerdere samenhangende delen. Eén zo’n deel noemen we een **samenhangscomponent.**



Voorbeelden van ruimtes met twee samenhangscomponenten: de gecombineerde ruimte van een torus plus een boloppervlak (links) en die van een cirkel plus een lijnstuk (rechts)

Samenhang kunnen we goed gebruiken om te onderzoeken of ruimtes homeomorf zijn.

Neem bijvoorbeeld de letters A en Q. Als deze twee ruimtes homeomorf zijn, moeten we bij allebei een punt kunnen weghalen, waarna de overgebleven ruimtes nog steeds homeomorf zouden moeten zijn. Maar als we slim een punt weghalen zien we dat Q in 3 samenhangscomponenten uiteen *kan* vallen, terwijl als we een punt weghalen bij A, we *hoogstens* 2 samenhangscomponenten vinden.

Q min een punt *kan* uit 3 samenhangscomponenten bestaan, maar A min een punt bestaat uit maximaal 2 samenhangscomponenten. Daarom kunnen A en Q niet dezelfde topologische ruimte zijn.

We concluderen dat A en Q niet-homeomorfe ruimtes zijn.

Opgave 5.

Gebruik deze methode om te laten zien dat de volgende paren niet homeomorf zijn.

a. X en E
b. A en 4
c. L en F
d. I en O

Opgave 6.

In plaats van een enkel punt weg te halen kun je ook meerdere punten weghalen.

a. Laat zien dat H en Y niet homeomorf zijn.

b. Hoeveel punten moet je minimaal weg halen om in één keer alle groepen van homeomorfe letters te onderscheiden?

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
				V	W	X	Y	Z		

Opgave 7.

Je kunt maar op één manier een cirkel uit een bolschil knippen. Je houdt steeds twee samenhangscomponenten over.

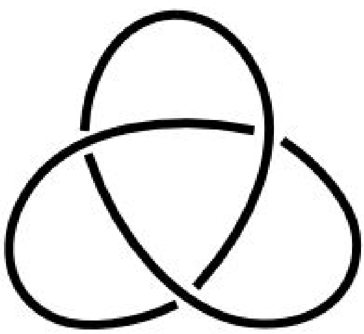
a. Op hoeveel topologisch verschillende manieren kun je een cirkel uit een fietsband (torus) knippen?

b. Hoeveel samenhangscomponenten vind je in de verschillende situaties?

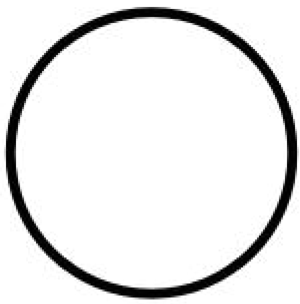
c. Beredeneer dat de bolschil en de torus niet homeomorf kunnen zijn.

Opgave 8.

Bekijk de volgende twee deelruimtes in de driedimensionale ruimte.



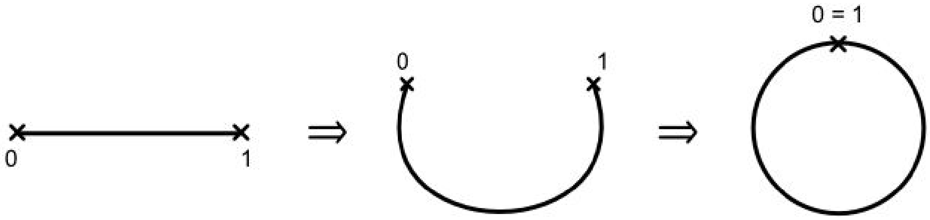
de klaverbladknoop



de onknoop

a. Kun je met de punten-weghaal-methode onderscheid maken tussen deze twee ruimtes?

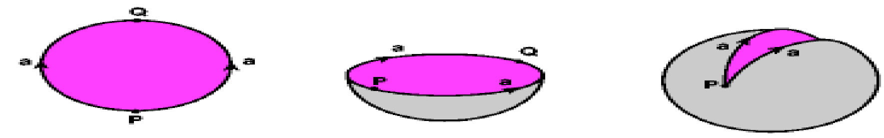
b. De onknoop heeft als bouwplaat een lijnstuk met de twee uiteinden aan elkaar geplakt, aangegeven met een kruisje (zie de illustratie). Wat is de bouwplaat van de klaverbladknoop?



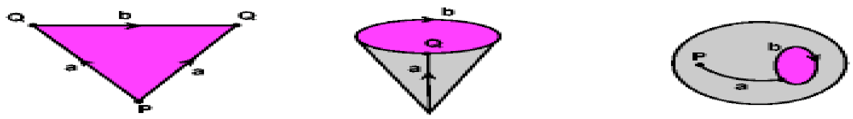
c. Stel je voor dat je een punt bent dat in één van deze ruimtes leeft. Kun je erachter komen welke van de twee het is? Zijn de ruimtes verschillend?

Bouwplaten

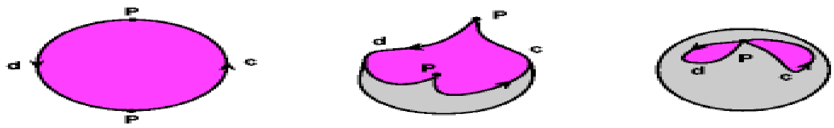
We hebben al een aantal bouwplaten gezien, zoals van de torus, de fles van Klein, de Möbiusband en de cilinder. Hieronder staan er nog een aantal bouwplaten met een inbedding in drie dimensies afgebeeld.



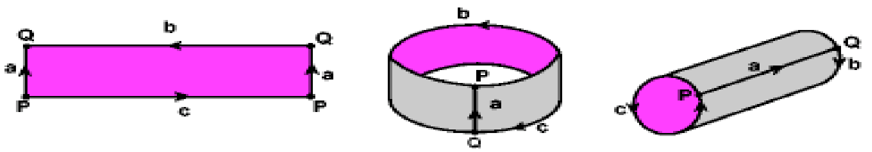
figuur 4



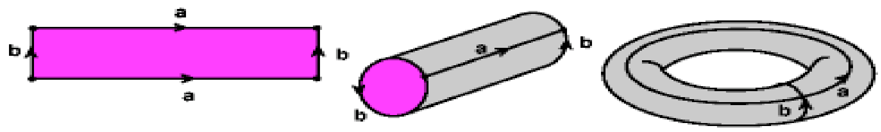
figuur 5



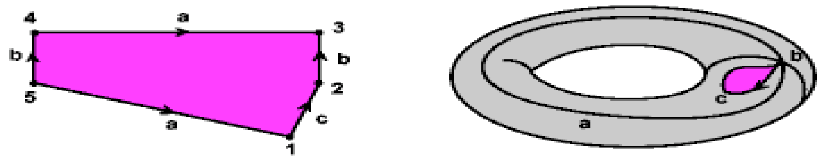
figuur 6



figuur 1



figuur 2



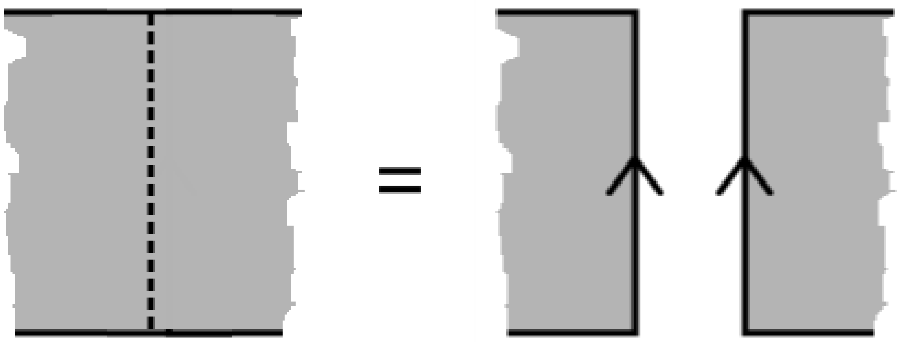
figuur 3

Bron: Van bouwplaat tot oppervlak, Jan Aarts, Pythagoras

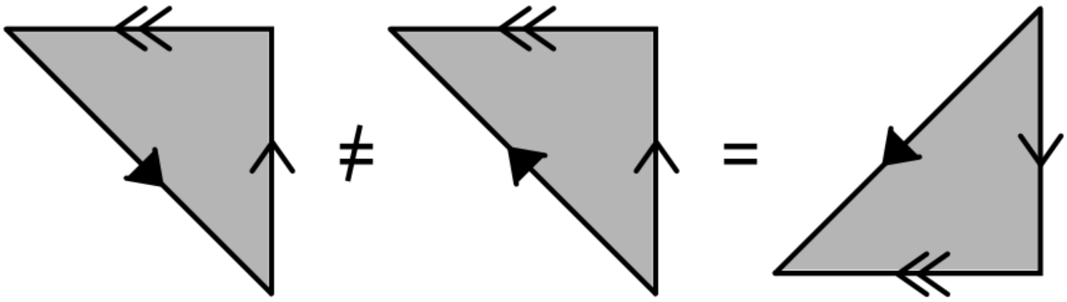
We zullen veel gebruik maken van bouwplaten om oppervlakken te onderzoeken. Het belangrijke voordeel van bouwplaten is dat de eigenschappen van de ruimte die niet intrinsiek zijn uit de beschrijving verdwijnen.

We kunnen bouwplaten veranderen door te 'knippen en plakken' als we de volgende regels gebruiken;

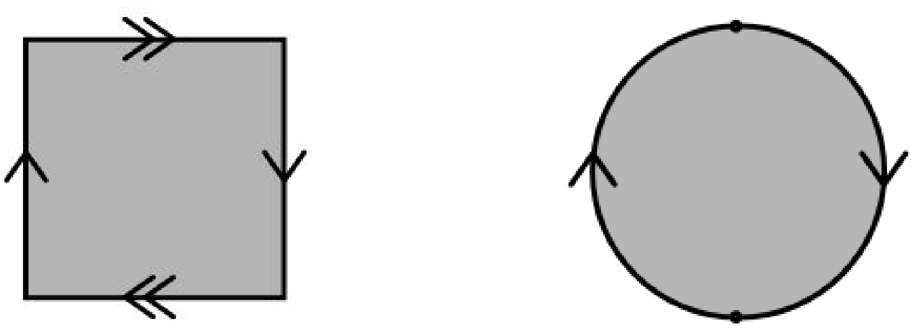
1. Je mag overal knippen zolang je maar aangeeft hoe je de stukken weer aan elkaar plakt.



2. Laat richtingen intact.

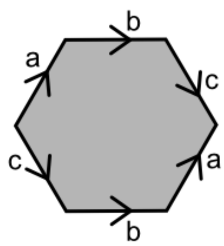


3. Je mag soms twee pijlen samenvoegen, namelijk wanneer je twee keer de zelfde volgorde tegenkomt.

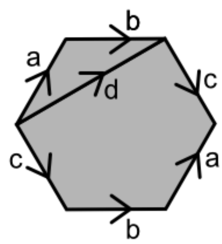


Opgave 9.

a. Kun je zien welk oppervlak ontstaat uit de volgende bouwplaat?



b. Knip de bouwplaat langs lijn d.

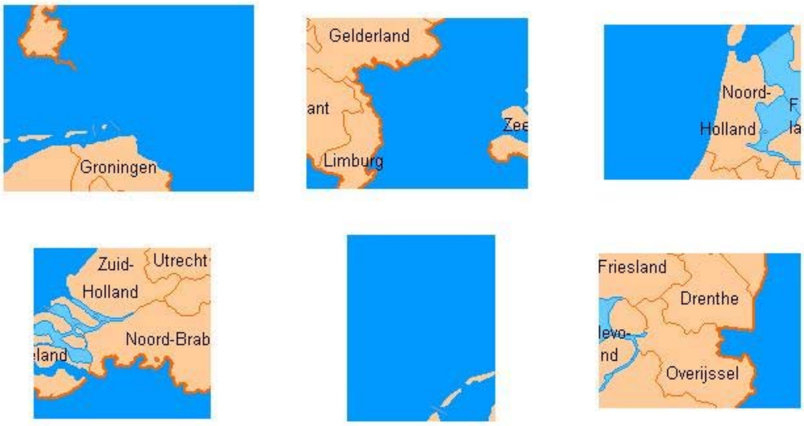


c. Plak het losse stuk bij lijn a of lijn b.

d. Welke ruimte heb je nu?

Opgave 10.

Kaarten vormen een soort bouwplaat van de wereld. Stel dat de hele aarde werd beschreven door de volgende zes kaarten

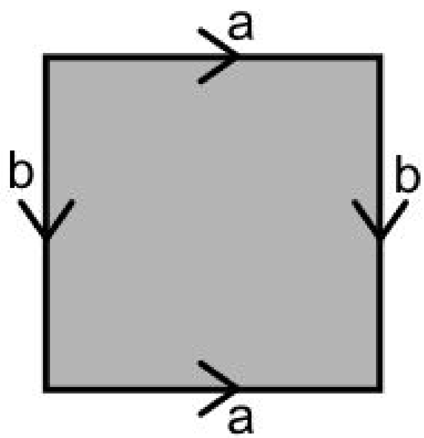


a. Teken de vorm van de aarde

b. Kun je coördinaten bedenken voor deze wereld, (teken 'meridianen' en 'breedtecirkels)?

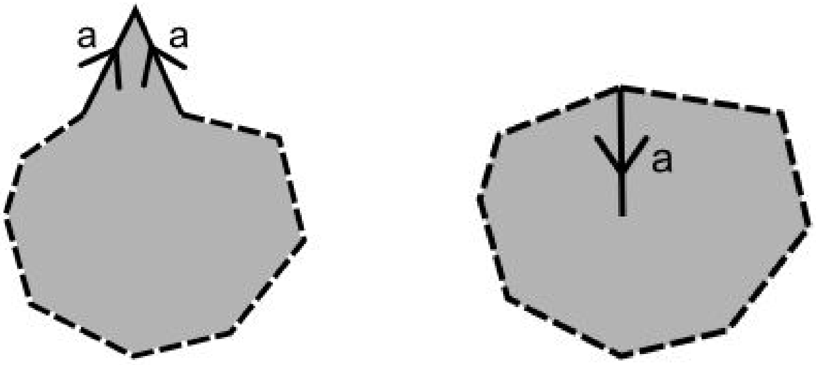
Identificatieschema's

We kunnen vaak kort noteren over welke bouwplaat we het hebben. Als we een bouwplaat hebben waarvan we de identificaties met letters op de rand aangeven, kunnen we het **identificatieschema** samenvatten als "woord". Hoekpunten zijn dan impliciet geïdentificeerd. We schrijven de letters zoals we ze tegenkomen als we met de klok mee langs de zijden van de veelhoek lopen. De oriëntatie van de pijl geven we aan door klein -1 rechts boven de letter te schrijven als de pijl "tegen de klok in" wijst. Het identificatieschema van de torus kunnen we daarmee noteren als $aba^{-1}b^{-1}$ (spreek uit: a, b, a-invers, b-invers).



De torus heeft identificatieschema $aba^{-1}b^{-1}$

Als bijvoorbeeld a en a^{-1} naast elkaar voorkomen in mogen we het paar weghalen. In symbolen kun je dit noteren als $aa^{-1} = 1$.

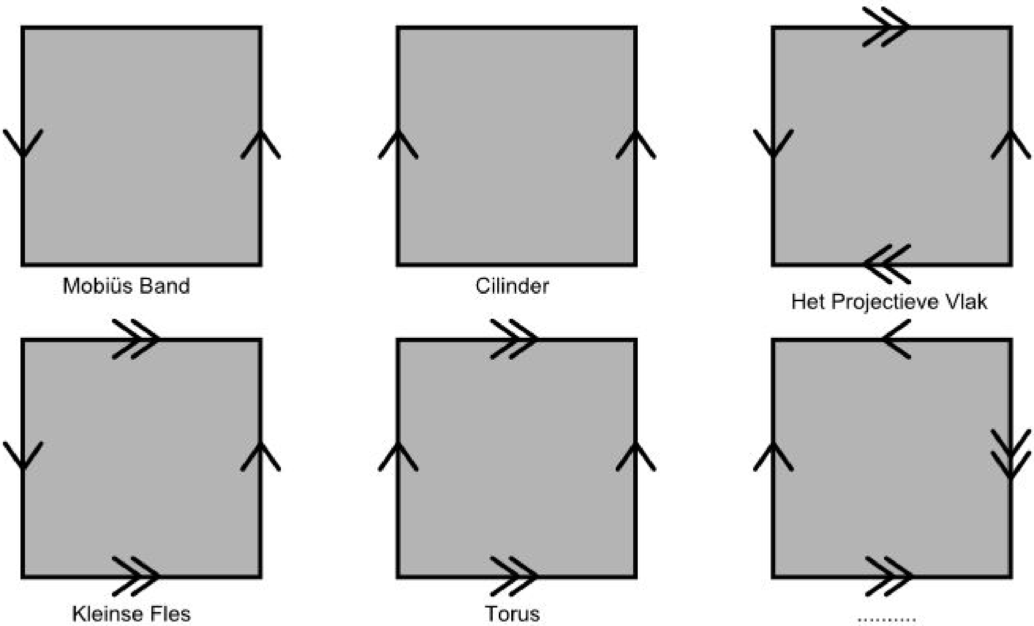


Illustratie van de gelijkheid $aa^{-1} = 1$

Als een letter maar één keer voor komt in het woord wordt de overeenkomende rand van de bouwplaat niet geïdentificeerd. Zo hoort het schema $aba^{-1}c$ bijvoorbeeld bij de cilinder. (Ga dit zelf na.)

Plakken van een vierkant

We hebben al een aantal voorbeelden van oppervlakken met een vierkante bouwplaat gezien. Het wordt tijd alle mogelijkheden op een rij te zetten. We hebben de volgende plakschema's.



Het **projectieve vlak**, afgekort met P^2, is nog niet behandeld. We zullen nog even niet proberen ons P^2 in drie dimensies voor te stellen.

Opgave 11.

Geef voor elk van de zes bouwplaten het identificatieschema in een woord.

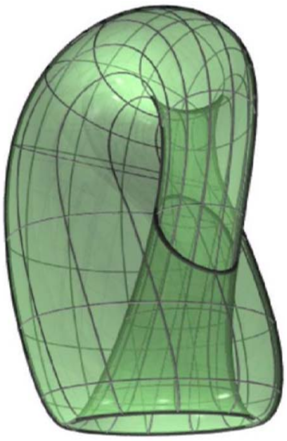
Opgave 12.

Wat is de ruimte met onderschrift "…" topologisch?

Opgave 13.

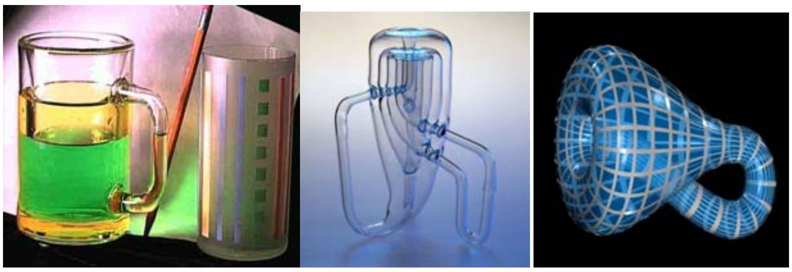
Kun je nog andere oppervlakken krijgen door het plakken van de zijden van een vierkant dan de zes die hierboven zijn gegeven?

De fles van Klein is niet zonder zelfdoorsnijding in een driedimensionale ruimte in te bedden. Als we de fles zichzelf laten doorsnijden, kunnen we hem als volgt afbeelden.



De fles van Klein (K^2)

De zelfdoorsnijding is *geen* intrinsieke eigenschap. Het hoort niet bij de fles van Klein zelf, maar bij de specifieke inbedding. Nog meer voorstellingen van de fles van Klein (waarvan sommige van echt glas) zijn:

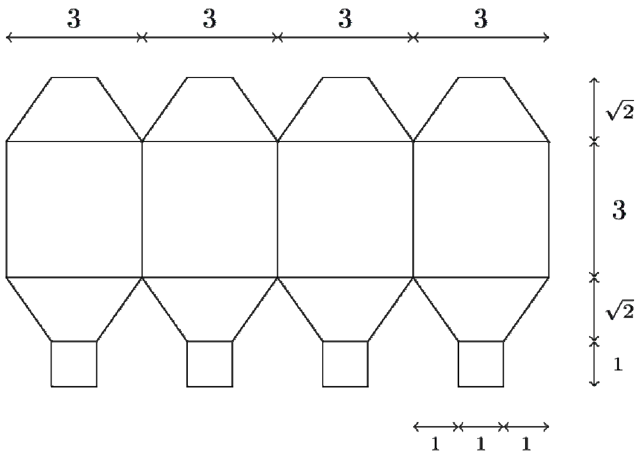


Kleinse fles als koffiekop (www.kleinbottle.com), met meerdere zelfdoorsnijdingen en een fles van Klein op zijn kant.

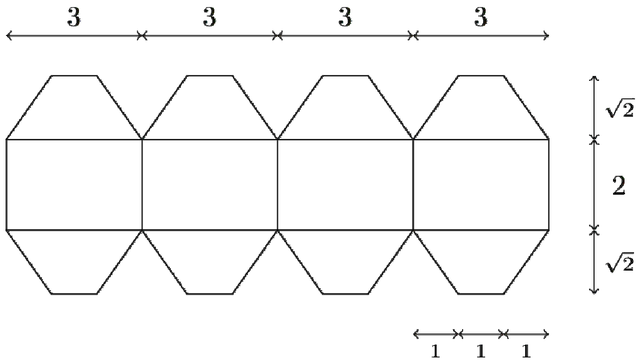
Opgave 14.

Maak papieren modellen van de torus en de fles van Klein met behulp van de bouwplaten op de volgende bladzijden.

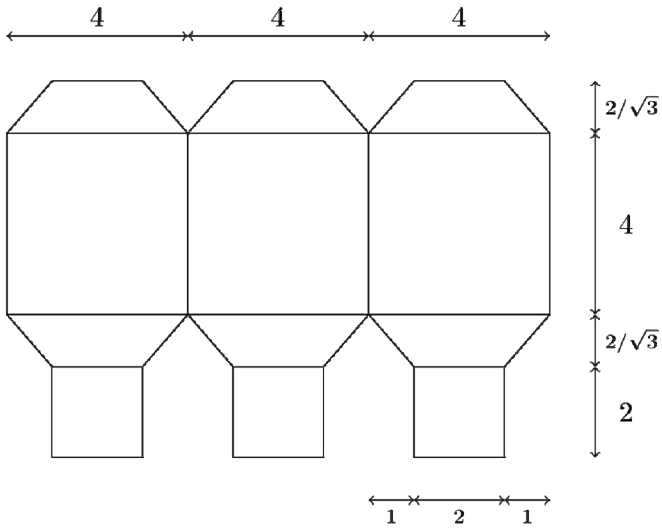
Torus 4×4:



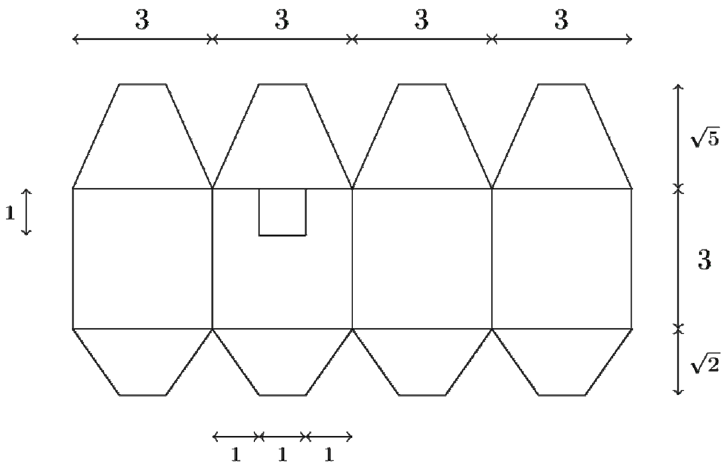
Torus 4×3:

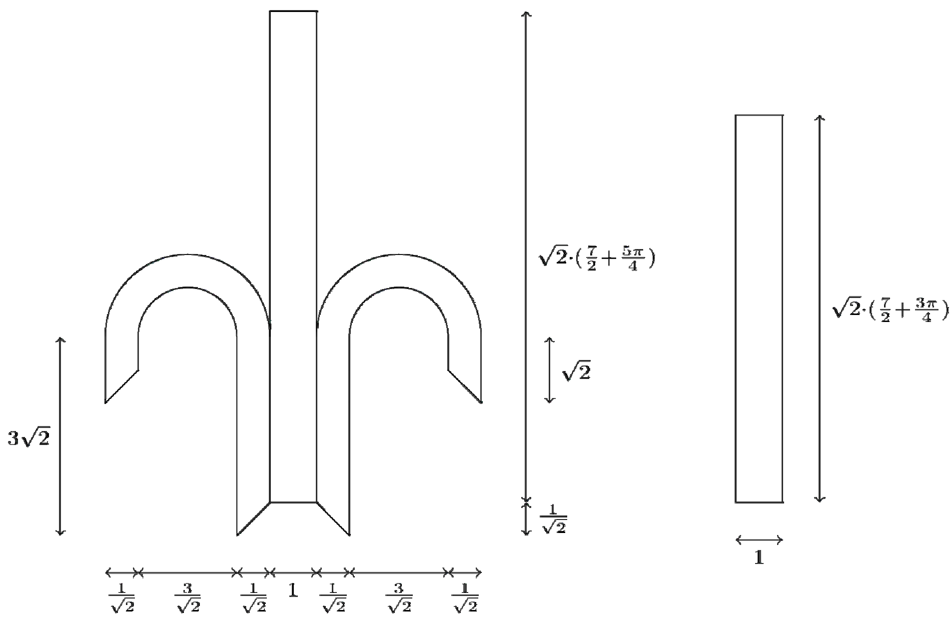


Torus 3×4:



Klein bottle:

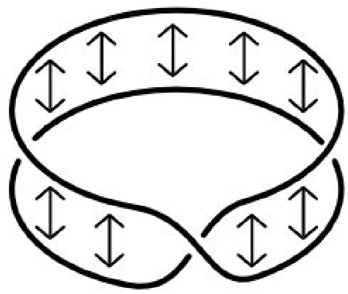




Bouwplaten gemaakt door André Henriques, masterclass *gekromde ruimte*, Universiteit Utrecht, oktober 2009

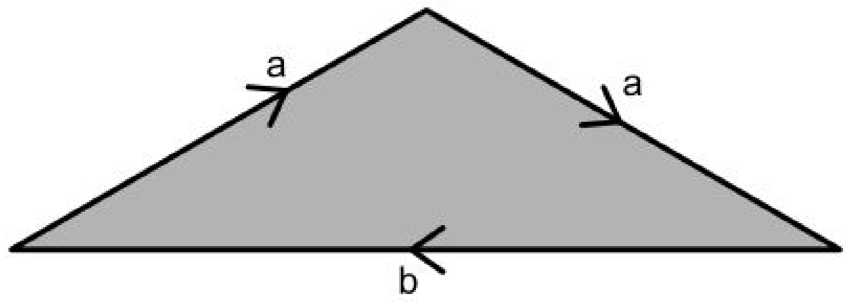
Opgave 15.

Wat krijg je als je de randcirkel van de Möbiusband aan zichzelf plakt, zoals aangegeven in het plaatje? Pijltjes betekenen hier dat de twee tegenoverliggende punten moeten worden geïdentificeerd. Tip: Maak een bouwplaat.



Opgave 16.

Welke bekende ruimte hoort bij het woord *aab*? (zie de onderstaande bouwplaat)



3. Oriënteerbaarheid en de Eulerkarakteristiek

In dit hoofdstuk gaan we verder met het onderzoeken van oppervlakken. We maken kennis met de intrinsieke eigenschap oriënteerbaarheid. Niet-oriënteerbare ruimtes hebben de vreemde eigenschap dat rechts en links van rol kunnen verwisselen voor een bewoner van de ruimte. Verder introduceren we de Eulerkarakteristiek, een bijzonder getal dat kan worden toegekend aan de ruimte.

Oriënteerbaarheid

Een mier op de Möbiusband kan door rechtdoor te lopen, zonder over de rand te klauteren, aan de tegenovergestelde zijde komen. Daarom noemen we de Möbiusband eenzijdig. Maar is dit een intrinsieke of een extrinsieke eigenschap? Wat zou er gebeuren als A Square *in* een Möbiusband leeft en hij loopt één maal rond?

Opgave 1.

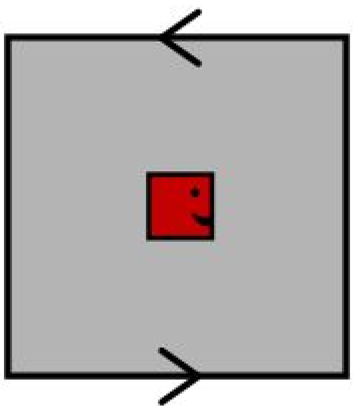
Is eenzijdigheid een intrinsieke eigenschap? Motiveer je antwoord.

Opgave 2.

Speel de applet A Square op http://www.jacobiencarstens.com/project1.htm.

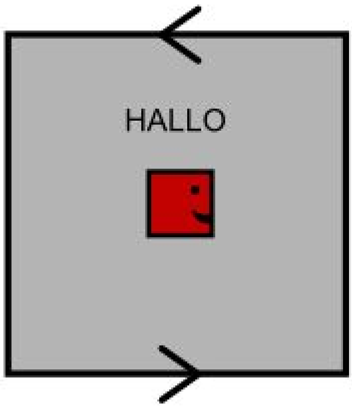
Opgave 3.

A Square vraagt zich af in welke ruimte hij leeft. Hieronder staat een tekening van A Square in zijn oppervlak:



Hij loopt naar boven totdat hij weer op zijn plek terug komt. Er lijkt niks veranderd.

Nu besluit hij een teken aan te brengen en hetzelfde nog eens te proberen. Een tekening van het moment van vertrek staat hieronder:



Flatland met A Square en het teken "HALLO"

Als hij terug komt is er iets vreemds aan de hand. Hij voelt zich hetzelfde, maar het teken dat hij heeft achter gelaten ziet er totaal anders uit!

a. Wat is de ruimte waarin A Square leeft?
b. Hoe ziet het teken eruit als A Square terug komt van zijn tocht? Maak een tekening met uitleg.

De Möbiusband noemen we **niet-oriënteerbaar**. De reden is dat er geen consistente afspraak te maken is over wat links en wat rechts is (oriëntatie), zoals je in de bovenstaande opgave hebt gezien. Er is een rondwandeling die links en rechts omdraait.

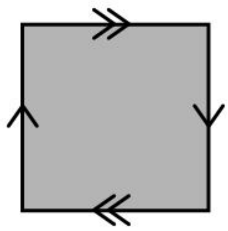
Een rondwandeling die rechts en links omdraait, heet een **oriëntatie-omkerend pad**. We noemen een ruimte niet-orieënteerbaar als er *een* oriëntatie-omkerend pad bestaat.

Een rondwandeling die links en rechts behoud noemen we **oriëntatiebehoudend**. Een ruimte heet **oriënteerbaar** als *elke* rondwandeling oriëntatiebehoudend is. Dat betekent dus dat *geen enkele rondwandeling* in de ruimte een oriëntatie-omkerend pad is. Het is duidelijk dat oriënteerbaar het tegenovergestelde is van niet-oriënteerbaar.

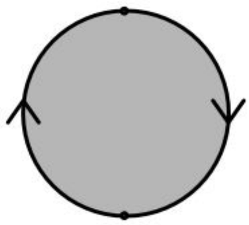
Voor oppervlakken komt oriënteerbaarheid op het volgende neer: *een oppervlak is niet-oriënteerbaar als het een kopie van de Möbiusband bevat en anders niet.* Als je je voorstelt dat A Square een strook uitsnijdt terwijl hij een oriëntatie-omkerend pad bewandelt zie je dat hij een Möbiusband overhoudt, terwijl hij bij een oriëntatiebehoudend pad een cilinder overhoudt.

Het projectieve vlak (P^2)

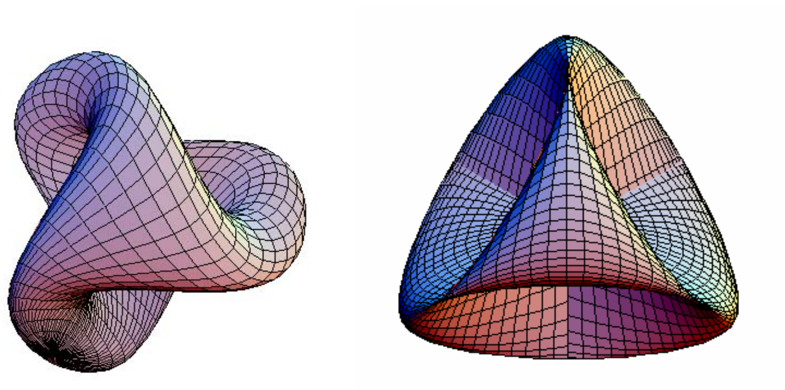
Er is één oppervlak, dat gemaakt kan worden vanuit een vierkant, dat we nog niet behandeld hebben. Dit heet het projectieve vlak, afgekort als P^2, en hoort bij de bouwplaat:



We kunnen de bouwplaat ook vormgeven als een cirkelschijf:



Het projectieve vlak kan net als de fles van Klein niet in 3 dimensies worden gerealiseerd zonder dat het zichzelf doorsnijdt . Twee weergaven met zelfdoorsnijding zijn:



Twee manieren om P^2 in 3 dimensies weer te geven.

Opgave 4.

Welke van de volgende oppervlakken zijn niet-oriënteerbaar? Maak van die oppervlakken een tekening waarin je een kopie van de Möbiusband aangeeft.

a) T^2 b) P^2 c) S^2 d) K^2

Opgave 5.

Stel dat het identificatieschema van een oppervlak bestaat uit een enkel woord. Geef een eenvoudig criterium om aan dit woord te herkennen of het oppervlak niet-oriënteerbaar is.

De Eulerkarakteristiek

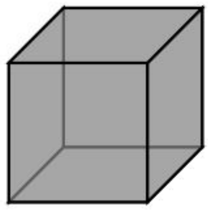
Van een oppervlak opgedeeld in veelvlakken, kun je het aantal hoekpunten, randen en vlakken tellen. We spreken de volgende notatie af:

V = hoekpunten (*vertices*)

E = randen (*edges*)

F = vlakken (*faces*)

Voorbeeld: de kubus

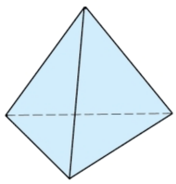


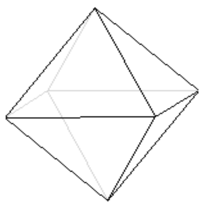
De kubus heeft 8 hoekpunten, 12 randen en 6 vlakken. We noteren dus

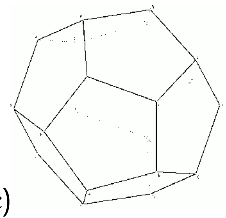
$V = 8 \qquad E = 12 \qquad F = 6$

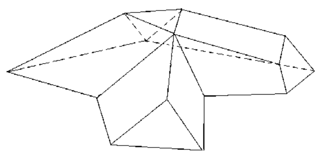
Opgave 6.

Maak een tabel met V, E en F en V – E + F voor de volgende oppervlakken:

a) 

b) 

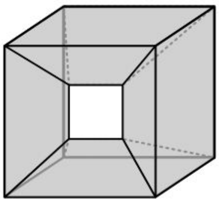
c) 

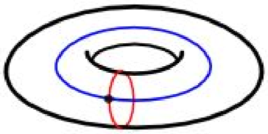
d) 

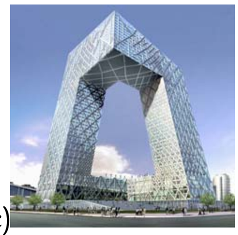
Ruimte	**V**	**E**	**F**	**V – E + F**
a)				
b)				
c)				
d)				

Opgave 7.

Tel weer V, E en F en vul de tabel in, maar nu voor deze ruimtes:

a) 

b) 

c) 

Bij c gaat het om de randen, vlakken en hoekpunten van de vorm van het gebouw, niet van de balken in de constructie. Teken het gebouw zonodig eerst op papier als een ruimte.

Ruimte	**V**	**E**	**F**	**V – E + F**
a)				
b)				
c)				

Het getal V – E + F wordt de **Eulerkarakteristiek** genoemd. De Eulerkarakteristiek blijkt alleen af te hangen van de topologie van het oppervlak. We noteren deze met de griekse letter χ (chi), dus we schrijven $\chi(A)$ voor de Eulerkarakteristiek van een oppervlak A.

Opgave 8.

Wat zijn $\chi(S^2)$ en $\chi(T^2)$?

Opgave 9.

Een voetbal bestaat uit vijfhoeken en zeshoeken. Laten we het aantal vijfhoeken even aangeven met *P* en het aantal zeshoeken met *S*.

a) Bepaal het aantal punten, lijnen en vlakken in termen van *P* en *S*.

Bepaal met behulp van de Eulerkarakteristiek van S^2 hoeveel vijfhoeken er nodig zijn voor een voetbal.

Opgave 10.

a. Teken tussen de vijf en tien punten op een papier. Verbind een aantal van deze punten met lijnen, zodanig dat geen van de lijnen elkaar kruisen.

b. Tel het aantal punten, lijnen en ingesloten vlakken.

c. Wat levert V – E + F je nu op?

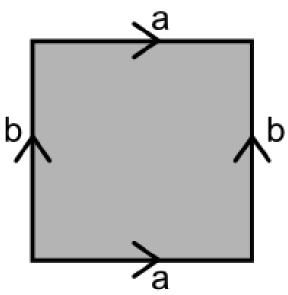
d. Met behulp van de Eulerkarakteristiek van welk oppervlak had je dit meteen kunnen beredeneren?

De Eulerkarakteristiek van bouwplaten

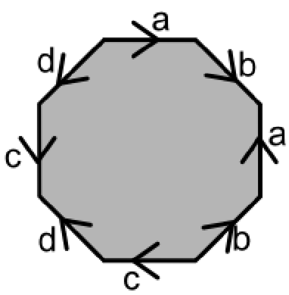
We kunnen ook de Eulerkarakteristiek uitrekenen door naar de bouwplaat van een oppervlak te kijken. Als de bouwplaat uit een veelhoek bestaat, hebben we maar één vlak. Bij de punten en lijnen moeten we oppassen dat sommige punten en lijnen nog met elkaar geïdentificeerd worden. Deze tellen we als één punt/lijn mee.

Opgave 11.

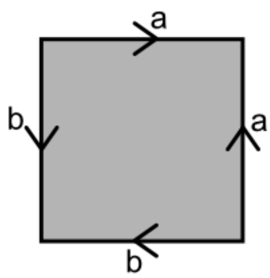
a. Bereken de Eulerkarakteristiek van de volgende bouwplaten.



Oppervlak 1



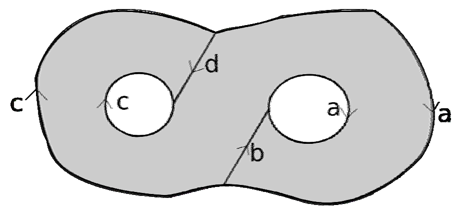
Oppervlak 2



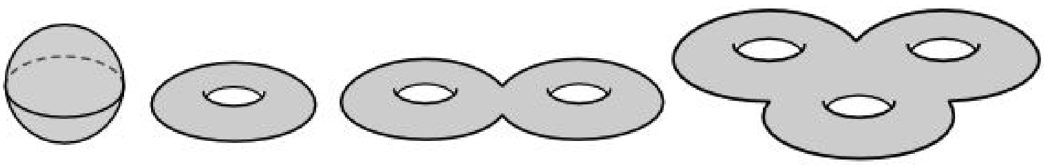
Oppervlak 3

Oppervlak	**V**	**E**	**F**	**V – E + F**
1				
2				
3				

b. Hoe ziet oppervlak 2 er uit? Tip:



c. De oppervlakken 2-sfeer (boloppervlak, 0 gaten), torus (1 gat), dubbele torus (2 gaten), etc. worden wel geschreven als Σ^g waar g staat voor de 'genus', het aantal gaten van het oppervlak. Wat *vermoed* je dat de Eulerkarakteristiek is van Σ^g ?



De oppervlakken Σ^g voor g=0, 1, 2, 3 op een rij

Opgave 12.

a. Bereken de Eulerkarakteristiek van de Kleinse fles en het projectieve vlak.
b. Noem een oppervlak met dezelfde Eulerkarakteristiek als de Kleinse fles.
c. We hebben nu gezien dat verschillende oppervlakken dezelfde Eulerkarakteristiek kunnen hebben. Welke eigenschap kun je naast de Eulerkarakteristiek gebruiken om zulke oppervlakken uit elkaar te houden?

Opgave 13.

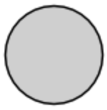
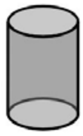
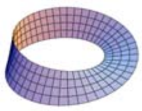
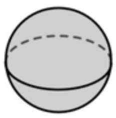
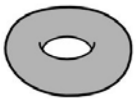
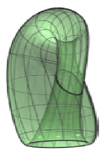
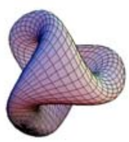
Gegeven zijn de volgende identificatieschema's op een zeshoek:

a) $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$	b) $aabbcc$	c) $abcb^{-1}c^{-1}a^{-1}$
d) $abca^{-1}bc^{-1}$	e) $abcabc^{-1}$	f) $ababcc$

a. Welke schema's stellen homeomorfe oppervlakken voor?
b. Bereken de Eulerkarakteristiek en oriënteerbaarheid bij de gegeven schema's. Wat valt je op in relatie tot vraag a.?
c. Wat is de Eulerkarakteristiek van het oppervlak behorende bij schema $aabbccddeeffgghh$ (16-hoek)? Is dit oppervlak oriënteerbaar? (Probeer deze vraag te beantwoorden zonder het oppervlak te tekenen.)
d. Vermoed je dat het oppervlak bij c. homeomorf is met het oppervlak gegeven door $aba^{-1}bcdc^{-1}defe^{-1}fghg^{-1}h$? Motiveer je antwoord.

4. De classificatie van oppervlakken

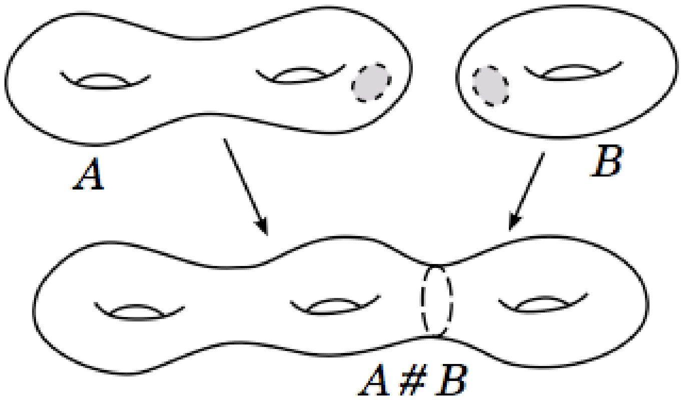
Er zijn al een heel aantal oppervlakken de revue gepasseerd. Hier een overzicht van de belangrijkste:

Plaatje	Naam	Notatie
	Cirkelschijf	D^2
	Cilinder	--
	Möbiusband	M^2
	De 2-sfeer	S^2
	De torus	T^2
	De fles van Klein	K^2
	Projectieve vlak	P^2

De vraag is nu of we alle mogelijke topologische oppervlakken in een lijst zouden kunnen zetten. Verder rijst de vraag of er een manier is om een oppervlak snel te herkennen. Deze vragen zullen we in dit hoofdstuk beantwoorden.

Samenhangende som

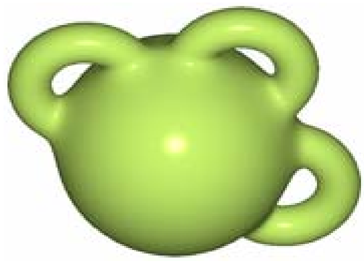
Je kunt twee oppervlakken altijd aan elkaar plakken en een nieuw oppervlak maken. Stel je hebt twee oppervlakken, A en B. Je haalt een schijfje uit zowel A als B en de overgebleven randcirkels plak je op elkaar. Het nieuwe oppervlak noemen we de **samenhangende som** van A en B.



De samenhangende som van een dubbele torus en een torus.

De samenhangende som van een A en B wordt genoteerd als A#B.

De samenhangende som nemen van een oppervlak A met de torus T^2 wordt wel het toevoegen van een handvat genoemd. Zie je in waarom?



S^2 # T^2 # T^2 # T^2 : Een 2-sfeer met drie handvatten.

Opgave 1.

Teken de volgende samenhangende sommen:

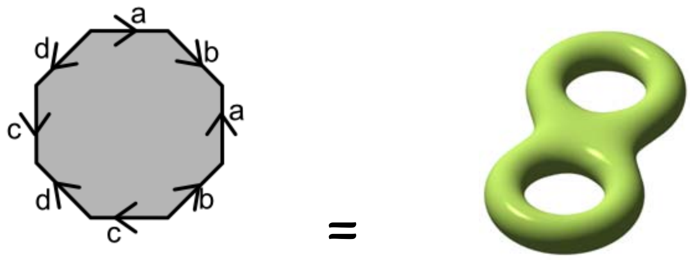
a. T^2 # T^2 # T^2
b. T^2 # K^2
c. S^2 # D^2
d. K^2 # D^2 (zonder zelfdoorsnijding)

Opgave 2.

a. Teken S^2 # T^2 en S^2 # K^2.
b. Laat A een willekeurig oppervlak zijn. Waar is S^2 # A gelijk aan? Beargumenteer/illustreer je antwoord.

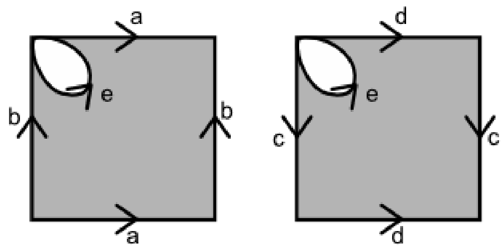
Samenhangende som van bouwplaten

We kunnen de samenhangende som ook direct van bouwplaten nemen. Bekijk de bouwplaat van de dubbele torus $T^2 \# T^2$:

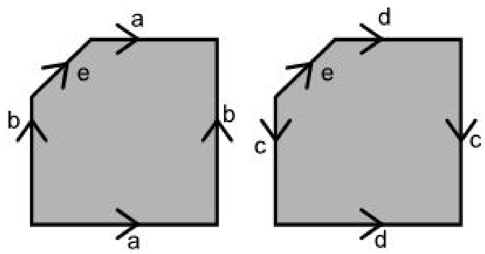


Plakschema dubbele torus Dubbele torus, $T^2 \# T^2$

Laten we nu kijken of we inderdaad deze bouwplaat vinden, wanneer we de samenhangende som van twee bouwplaten voor de torus nemen. We knippen eerst uit beide torussen een cirkelschijf. Aangezien we de randen van deze cirkelschijven op elkaar willen plakken geven we deze beide de letter e.

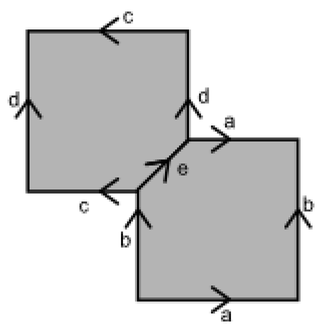


Als we dit fatsoeneren krijgen we de volgende twee bouwplaten.

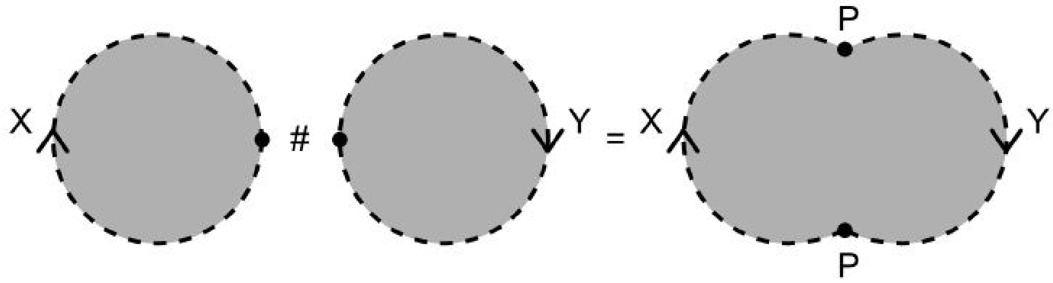


We hebben effectief aan beide oppervlakken een rand toegevoegd, waarbij we een handige plek voor deze rand gekozen hebben. Het maakt niet uit waar we de schijf verwijderen.

Nu plakken we de bouwplaten aan elkaar bij rand e. We zien dat we het identificatieschema $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ van de dubbele torus krijgen.



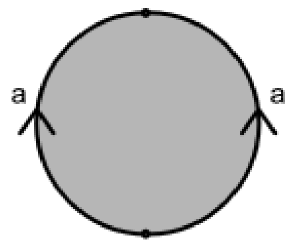
In het algemeen geldt het volgende: Stel dat we twee bouwplaten hebben die allebei worden gegeven door een woord. We noteren de respectievelijke woorden even met X en Y. De samenhangende som van de twee bouwplaten wordt dan gegeven door het woord XY (samenvoegen van de twee eerdere woorden), *mits de twee punten horende bij de overgang tussen de woorden in de nieuwe bouwplaat zijn geïdentificeerd.*



In het bijzonder geldt deze regel altijd als ten minste één van de twee oppervlakken geen rand heeft.

Opgave 3.

In Opgave 2 zagen we dat de samenhangende som van een oppervlak A met S^2 steeds het oorspronkelijke oppervlak A oplevert. De makkelijkste bouwplaat voor S^2 is hieronder getekend.



Bouwplaat voor S^2

Laat zien dat de samenhangende som van een bouwplaat A met de bouwplaat van S^2 weer de bouwplaat A oplevert.

Opgave 4.

Geef bij elke ruimte van de linkerkolom aan, welke ruimte van de rechterkolom er aan gelijk is.

$P^2 \# P^2$	M^2
$D^2 \# P^2$	D^2
$S^2 \# D^2$	K^2

Over wiskunde

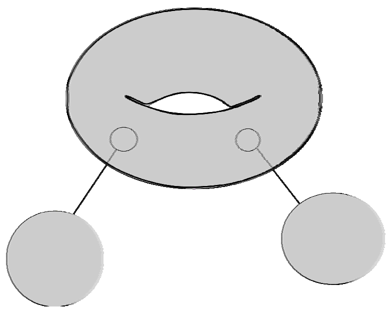
We zijn veel met oppervlakken bezig geweest. Daarbij zijn veel voorbeelden van oppervlakken behandeld en veel verschillende manieren om oppervlakken voor te stellen. Maar willen we de vraag behandelen wat *alle* oppervlakken zijn (en hoe we ze kunnen herkennen), dan zullen we eerst een aantal stappen moeten zetten die kenmerkend zijn voor wiskundige wetenschap.

Eerst zullen we een afspraak moeten maken wat we eigenlijk met oppervlak bedoelen. Dit wordt geformuleerd in een **definitie**. Vervolgens willen we onze intuïtie gebruiken, die we hebben opgedaan door met voorbeelden van oppervlakken bezig te zijn, om een wiskundig **vermoeden** te formuleren. Als we dit vermoeden door logisch te redeneren kunnen bewijzen, verandert het in een **stelling** die zegt welke oppervlakken er (volgens onze definitie) allemaal bestaan.

In de wiskunde is de technische term voor oppervlak *tweedimensionale variëteit*. De oppervlakken die we willen classificeren hebben daarbij geen *rand*. Verder zijn ze *compact* en *samenhangend*. Dergelijke oppervlakken noemen we wel **gesloten oppervlakken**. In de volgende alinea's behandelen we deze eigenschappen en vertalen ze naar eigenschappen van bouwplaten.

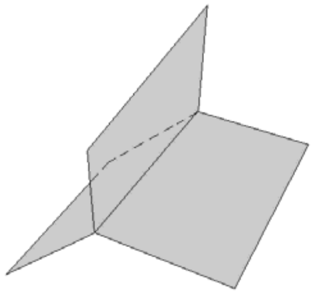
Variëteiten

Het is voor een bewoner van een oppervlak zonder rand niet makkelijk om zijn ruimte te onderscheiden van een oneindig vlak. Voor elk willekeurig punt is er een kleine omgeving die er uit ziet als een stukje vlak. Ruimtes die aan deze eigenschap voldoen noemen we tweedimensionale **variëteiten**. Het "tweedimensionaal" geeft aan dat het er rond elk punt uit ziet als een stukje *vlak*, en niet als bijvoorbeeld een lijn of driedimensionale ruimte. In de illustratie staat dit uitgebeeld voor de torus.



Een torus is een variëteit. Welk punt je een bewoner ook kiest, er is altijd een kleine omgeving die er uit ziet als een stukje vlak.

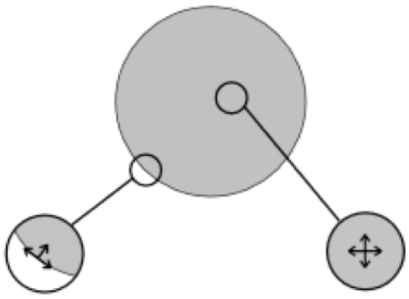
Een voorbeeld van een ruimte die deze eigenschap niet heeft is een boek. Dat is een ruimte waar drie of meer oppervlakken langs een rand aan elkaar zijn geplakt:



Dit blijkt de enige situatie die je in bouwplaten moet uitsluiten. *Een bouwplaat geeft een variëteit als geen enkele letter drie of meer keer voor komt in het identificatieschema.*

Rand[1]

We hebben al veel oppervlakken met rand gezien, bijvoorbeeld de cilinder, cirkelschijf en Möbiusband. In een punt op de rand ziet het er niet uit als een stukje vlak. Voor een bewoner is er "een richting afgesloten" (zie de illustratie met de cirkelschijf).



Illustratie van een randpunt ten opzichte van een gewoon punt.

Omdat de randpunten door een bewoner te herkennen zijn (intrinsiek) zullen deze zichtbaar zijn, welke representatie van de ruimte er ook gekozen wordt. In bouwplaten vertalen randen zich als zijden die niet met een andere zijde zijn geïdentificeerd. *In een identificatieschema geeft dit een letter die slechts één keer voorkomt.*

Compact

Compact betekent min of meer eindig, maar dan op een topologische manier. Met deze eis wordt bijvoorbeeld het oneindige vlak niet meegenomen in de classificatiestelling. *Wij vertalen dit naar de aanname dat we het oppervlak kunnen maken vanuit een bouwplaat met een eindig*

[1] De reden dat oppervlakken met rand niet worden meegenomen in de classificatiestelling is omdat elk oppervlak met rand kan worden gemaakt uit een oppervlak zonder rand, door een cirkelschijf uit te knippen (de samenhangende som nemen met kopieën van D^2).

identificatieschema (eindig veel letters). "Bouwplaten" opgebouwd uit een oneindig aantal veelhoeken, of uit "veelhoeken" met een oneindig aantal zijden nemen we niet mee.

Samenhangend

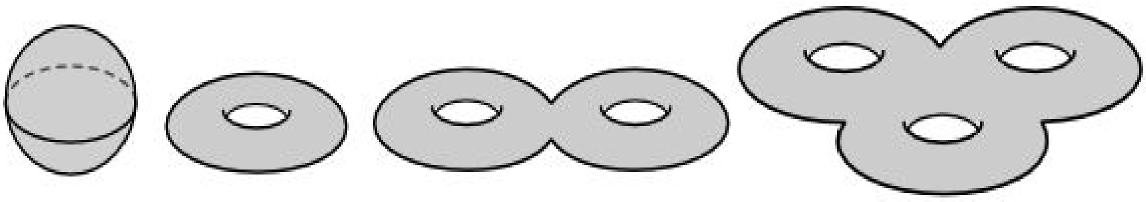
De bouwplaat van een samenhangend oppervlak kan altijd worden gereduceerd tot een enkele veelhoek. *Dus het identificatieschema van een samenhangend oppervlak kan worden gereduceerd tot een enkel woord.*

Een vermoeden

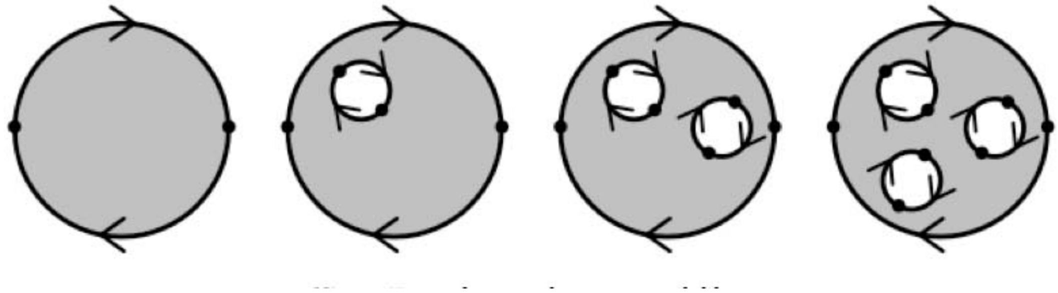
De oriënteerbare gesloten oppervlakken die we hebben gezien, zijn de 2-sfeer en de torus. We weten dat we meer van deze oppervlakken kunnen construeren door de samenhangende som met T^2 te nemen (een handvat toe te voegen).

De niet-oriënteerbare gesloten oppervlakken die we hebben gezien, zijn het projectieve vlak en de fles van Klein. De laatste bleek homeomorf met $P^2\#P^2$. Deze lijst kunnen we voortzetten door meer kopiëen van P^2 toe te voegen.

We hebben de dus in elk geval de volgende gesloten oppervlakken:



Oriënteerbare gesloten oppervlakken



Niet-oriënteerbare gesloten oppervlakken

Een boud vermoeden zou kunnen zijn dat dit *alle* gesloten oppervlakken zijn. Dus dat we de gesloten oppervlakken allemaal kunnen opsommen met behulp van de volgende tabel:

S^2	
T^2	P^2
T^2 # T^2	P^2 # P^2
T^2 # T^2 # T^2	P^2 # P^2 # P^2
T^2 # T^2 # T^2 # T^2	P^2 # P^2 # P^2 # P^2
…	…

Alle gesloten oppervlakken?

Eén probleem doet zich direct voor. De samenhangende som van een torus en een projectief vlak is een gesloten oppervlak dat niet in de lijst voorkomt. Het is niet oriënteerbaar. Als het vermoeden stand wil houden moet P^2#T^2 dus homeomorf zijn met de samenhangende som van een aantal kopieën van P^2.

Maar stel dat P^2#T^2 in verdekte vorm al voorkomt in de rechterkolom van de tabel, hoe weet je dan nog iets zeker? Misschien staan er al oppervlakken dubbel genoemd. We moeten dus ook laten zien dat de opgesomde oppervlakken allemaal verschillend zijn.

Deze twee problemen pakken we aan in de volgende twee opgaven.

Opgave 5.

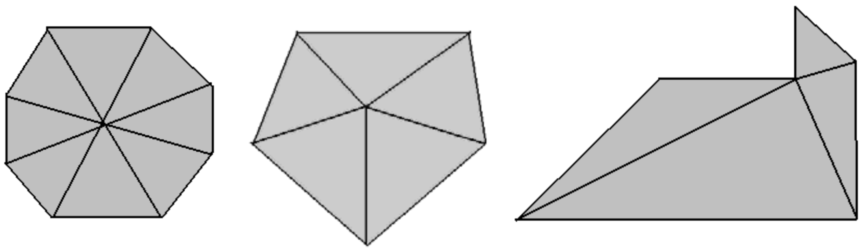
De eigenschap oriënteerbaarheid houdt de linker- en rechterkolom van de tabel met gesloten oppervlakken uit elkaar. We gaan laten zien dat de Eulerkarakteristiek voldoende is om alle oppervlakken binnen een kolom te onderscheiden.

a. Geef de Eulerkarakteristiek van S^2, T^2, en T^2#T^2.

b. Laat A en B twee willekeurige oppervlakken zijn. Neem aan dat er zowel bij A als bij B drie zijden zijn (in de berekening van de Eulerkarakteristiek), die samen een driehoek vormen. Knip de driehoeken uit en plak de oppervlakken A en B langs de randen aan elkaar. Welk oppervlak heb je nu gekregen? Beredeneer/illustreer je antwoord.

c. Beredeneer dat $\chi(A\# B) = \chi(A) + \chi(B) - 2$.

d. Beredeneer dat de aanname (bij b.) dat er een driehoek zit in de opdeling van A en B (gebruikt om de Eulerkarakteristiek te berekenen) geen invloed heeft op het onder c. gevonden resultaat. Hint: Hoeveel vlakken, lijnen en punten voegt het verder opdelen van een veelhoek in driehoekjes toe?



e. Beredeneer dat alle oppervlakken in de tabel met gesloten oppervlakken verschillend zijn

Opgave 6.

In deze opgave ga je laten zien dat P^2 # T^2 homeomorf is aan P^2 # P^2 #P^2 .

a. Waarom is P^2 # P^2 # P^2 het enige mogelijke oppervlak in de tabel gesloten oppervlakken waaraan P^2#T^2 homeomorf kan zijn?

P^2 #P^2 is homeomorf met K^2; daarom kunnen we de te bewijzen gelijkheid schrijven als P^2 # T^2 = P^2 # K^2. We geven twee suggesties om tot het bewijs te komen:

I. Met bouwplaten: laat zien dat de volgende gelijkheden gelden als we ze opvatten als gelijkheden van (identificatieschema's) van bouwplaten:

$$aabcb^{-1}c^{-1} = bdcbc^{-1}d = eedcd^{-1}c$$

Beargumenteer dat dit laat zien dat P^2 # T^2 = P^2 # K^2.

II. Stap 1: Laat zien dat een projectief vlak met een schijfje eruit geknipt (P^2 # D^2) homeomorf is met een Möbiusband.

Stap 2: Laat met tekeningen zien dat een Möbiusband met een handvat gelijk is aan de samenhangende som van een Möbiusband en een fles van Klein.

b. Bewijs de gelijkheid P^2 # T^2 = P^2 # K^2.

De classificatiestelling

De classificatiestelling voor gesloten oppervlakken zegt:

Elk gesloten oppervlak is homeomorf met S^2, met de samenhangende som van een aantal tori, of met de samenhangende som van een aantal kopieën van het projectieve vlak.

Dus: de eerder gegeven tabel bevat inderdaad alle topologisch verschillende gesloten oppervlakken!

De aanname

We gaan de classificatiestelling nu bewijzen. We nemen daarbij het volgende aan:

We nemen aan dat ieder gesloten oppervlak gemaakt kan worden uit een samenhangende bouwplaat: een enkele veelhoek waarvan de zijden in paren geïdentificeerd zijn.

Dit geeft een woord (met een eindig aantal letters) waarin alle verschillende letters in paren voorkomen.

Om de classificatiestelling helemaal formeel te bewijzen, zouden we eerst nog twee stappen moeten bewijzen die de aanname legitimeren. Ten eerste: dat elk gesloten oppervlak (formeel gedefinieerd als samenhangende compacte 2-variëteit zonder rand) trianguleerbaar is, dat wil zeggen op te delen in een (eindig aantal) driehoeken. Ten tweede: dat de driehoekjes aan elkaar te plakken zijn tot een enkel veelhoek. Het bewijs voor die twee stappen zullen we hier niet uitwerken.

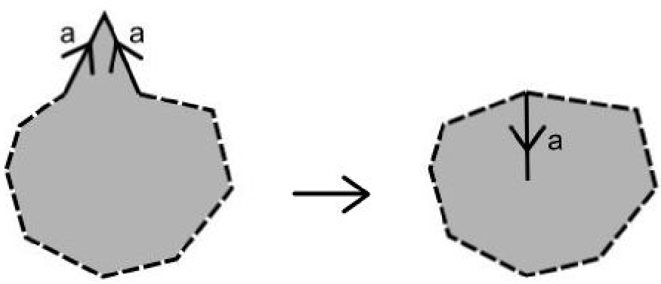
Het bewijs voor de classificatiestelling

Met het bewijs willen we in stappen laten zien dat we het woord van een willekeurig gesloten oppervlak kunnen reduceren tot een standaardvorm. In die *standaardvorm* worden "P^2-delen", bijvoorbeeld aa, afgewisseld met "T^2-delen" van de vorm $aba^{-1}b^{-1}$. Als we dat bewijzen, tonen we aan dat het gekozen oppervlak homeomorf is aan de samenhangende som van P^2's en T^2's. Daaruit volgt de classificatiestelling, want:

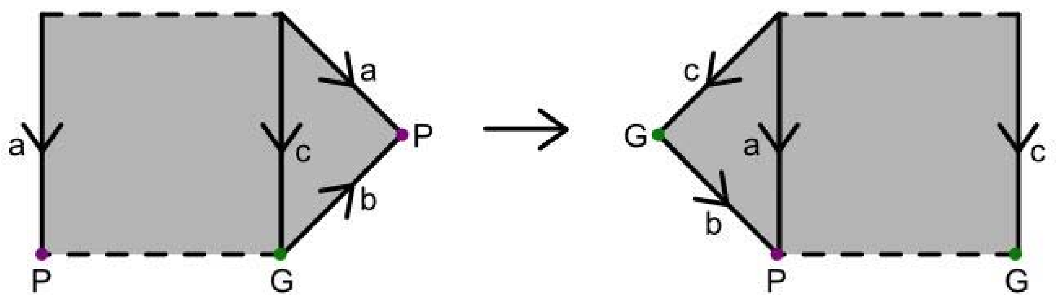
- Als er een P^2 in het oppervlak voorkomt, kunnen we T^2 vervangen door $P^2 \# P^2$ dankzij de gelijkheid $P^2 \# T^2 = P^2 \# P^2 \# P^2$.
- Als er geen P^2-stukken voorkomen, hebben we de samenhangende som van tori. Daarbij hoort een identificatieschema met alleen maar stukken van de vorm $aba^{-1}b^{-1}$ achter elkaar.
- De laatste mogelijkheid is dat er ook geen T^2–delen in het oppervlak voorkomen. Het woord is dan "leeg", wat betekent dat het oppervlak homeomorf is met S^2.

Bewijs:

Stap 1: Verwijder alle stukken van de vorm aa^{-1} uit het woord.

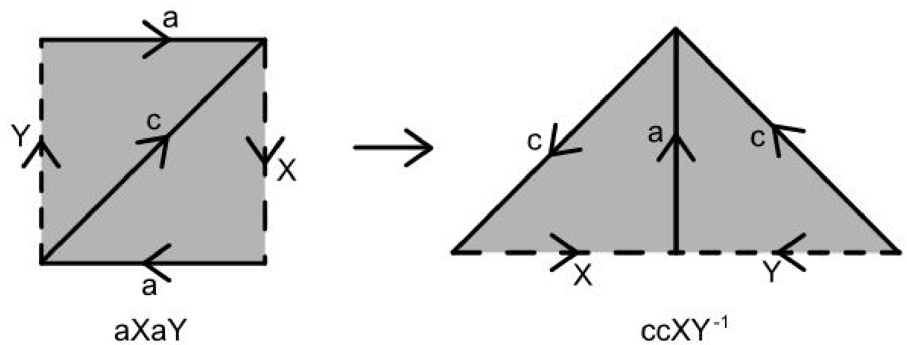


Stap 2: Ga over op een bouwplaat waarvan alle hoekpunten met elkaar zijn geïdentificeerd. Dit kan als volgt: stel dat de hoekpunten van de veelhoek zijn geïdentificeerd in twee groepen, groen (G) en paars (P). Ergens moeten er een groen en een paars punt naast elkaar liggen. Vervolgens kunnen we de volgende bewerking uitvoeren om een paars punt voor een groen punt in te ruilen:



Ga door totdat alle punten groen zijn. Verwijder alle aa^{-1} stukken. (Dit kan nodig zijn om de laatste paarse punten weg te halen.)

Stap 3: Voeg alle P^2-achtige stukken samen. Dat wil zeggen, als er een letter twee keer met dezelfde oriëntatie voorkomt (als ...a...a... of als ...a^{-1}...a^{-1}...) kunnen we met knippen en plakken een P^2-stuk in elkaar zetten:

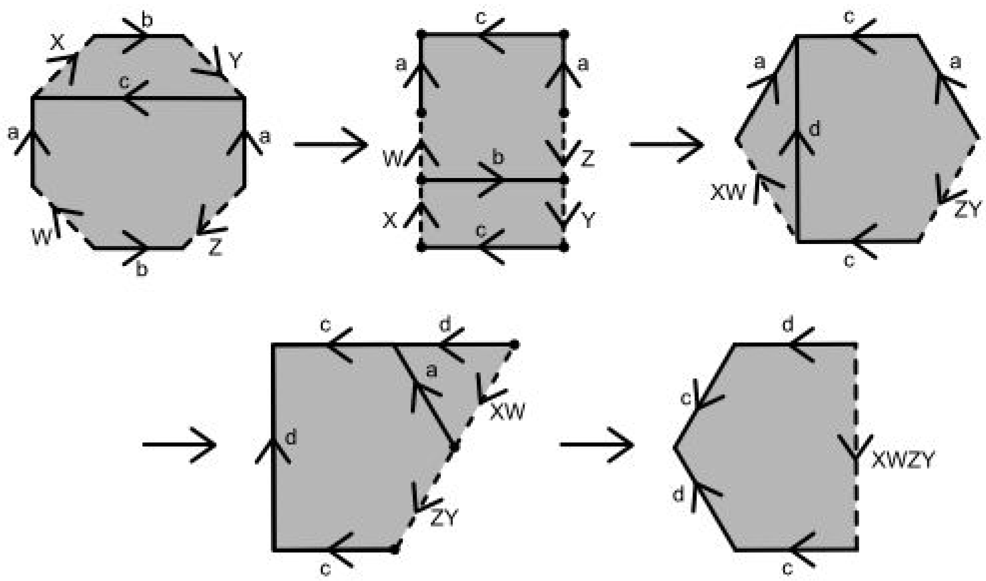


De letters X en Y staan voor een willekeurig aantal randen met letters. Bijvoorbeeld X = bdb, Y = d.

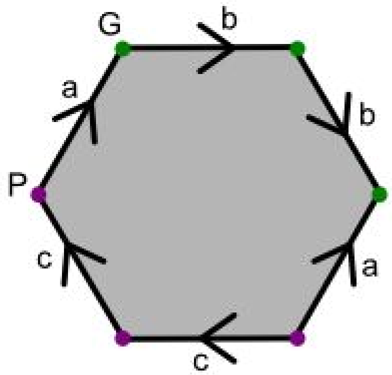
Met deze plaatjes leiden we de regel $aXaY = ccXY^{-1}$ af. We kunnen de c's nu eventueel weer veranderen in a's, aangezien dit slechts aangeeft dat deze randen op elkaar geplakt worden. Dan vinden we de regel; $aXaY = aaXY^{-1}$. Pas deze regel zo vaak mogelijk toe, totdat alle "aa-paren" zijn samengevoegd. Herhaal stap 1 als nodig.

Stap 4: Als laatste voegen we de T^2-achtige stukken samen. Zoek naar zijden die voorkomen in de volgorde a ... b ... b^{-1} ... a^{-1} ... .

Deze stap heeft twee keer knippen nodig. We knippen langs c en plakken langs b. Vervolgens knippen we langs d en plakken langs a. De nieuwe veelhoek heeft geen zijdes met a en b meer, maar wel een sequentie $cdc^{-1}c^{-1}$ zoals de torus.



Als we klaar zijn met deze stap, hebben we een identificatieschema met alleen maar P^2-stukken en T^2-stukken gekregen. We hebben immers alle aa-paren samengevoegd, net als zijden van de vorm $aba^{-1}b^{-1}$. Het enige wat nu nog over zou kunnen zijn, is een aa^{-1} paar dat slechts is gescheiden door paren van letters, bijvoorbeeld als in $abba^{-1}cc$. Maar is dat het geval, dan waren in stap 2 niet alle hoekpunten geïdentificeerd.



Als de zijden a en a^{-1} *alleen door identificatieparen worden gescheiden, zijn niet alle hoekpunten geïdentificeerd.*

Hier volgt nog eens een tabel met, per stap, de regel die is afgeleid in symbolen weergegeven.

Stap 1.	$aa^{1}XY$	=	XY
Stap 2.	$aXba^{-1}Y$	=	$cbXc^{-1}Y$
Stap 3.	$aXaY$	=	$ccXY^{-1}$
Stap 4.	$aXbYa^{-1}Zb^{-1}W$	=	$cdc^{-1}d^{-1}XYZW$

Reductieregels voor bouwplaten

Opgave 7.

Pas de stappen van het bewijs toe op het identificatieschema $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ van de torus en laat zien dat dit inderdaad reduceert to het standaard schema $aba^{-1}b^{-1}$.

Opgave 8.

Laat zien dat als na stap 2 alle hoekpunten van de bouwplaat zijn geïdentificeerd, de stappen 3 en 4 van het bewijs dit niet kunnen veranderen.

Opgave 9.

Reduceer het volgende identificatieschema tot zijn standaardvorm. Welk oppervlak is het?

$$acbdb^{-1}c^{-1}a^{-1}d^{-1}$$

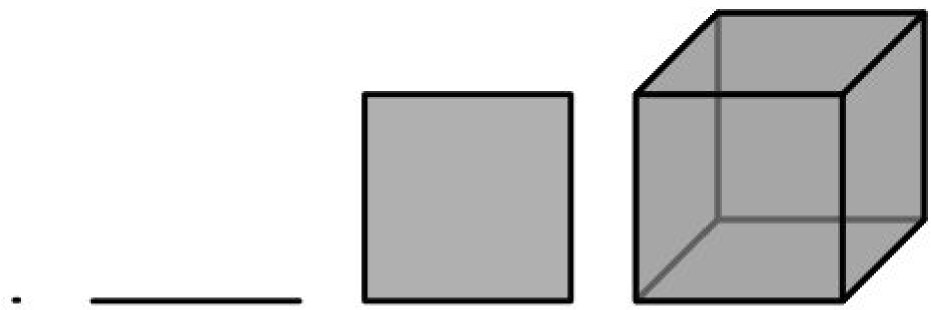
5. Dimensies

Tot dusver hebben we overwegend oppervlakken besproken. dit zijn per definitie tweedimensionale ruimtes. De wereld om ons heen is driedimensionaal. Een punt en een lijn zijn respectievelijk 0- en 1-dimensionaal. Maar er zijn ook ruimtes met meer dan drie dimensies:

- computers rekenen eenvoudig in honderden dimensies;
- dankzij de Algemene Relativiteitstheorie van Albert Einstein zijn ruimte en tijd onlosmakelijk met elkaar verbonden in het vierdimensionale ruimte-tijd-continuüm. De kromming van de ruimtetijd is te voelen als zwaartekracht;
- de snaartheorie, een theorie in de moderne natuurkunde die elementaire deeltjes beschrijft als trillende snaartjes, voorspelt naast de drie zichtbare dimensies nog zes, compact opgerolde, ruimtelijke dimensies, voor een totaal van negen ruimtelijke dimensies;
- wiskundigen hebben het met gemak over oneindig dimensionale ruimtes.

De vierdimensionale kubus

Een manier om hogere dimensies te benaderen is als volgt: begin met een punt. Sleep dit over een eenheid lengte. Daarmee maak je een interval of lijnstuk. Dit heeft één dimensie. Als je dit interval een eenheid sleept krijg je een vierkant (twee dimensies). Als je vervolgens het vierkant sleept krijg je een kubus (drie dimensies).

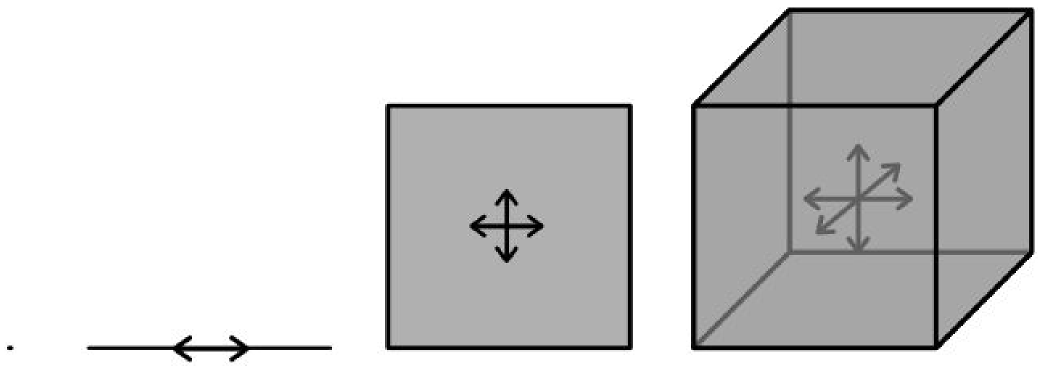


Als je een punt "sleept" maak je een lijnstuk. Als je een lijnstuk "sleept" maak je een vierkant. Als je een vierkant "sleept" maak je een kubus.

De dimensie van een ruimte is het aantal richtingen waarin een bewoner van de ruimte zou kunnen bewegen. Anders geformuleerd:

*De **dimensie** van een ruimte is het aantal onafhankelijke richtingen in een inwendig punt.*

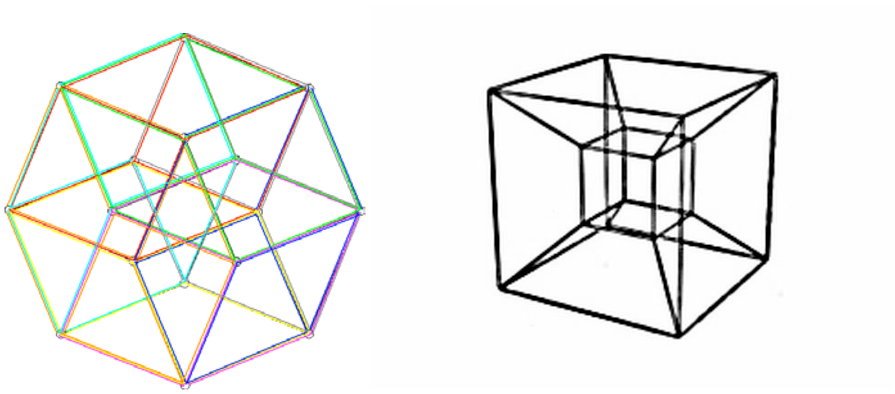
Onafhankelijk betekent dat bijvoorbeeld "voor-achter" als één richting telt. Inwendig wil zeggen dat we punten op de rand even buiten beschouwing laten.



De dimensie van punt, lijn en kubus geïllustreerd

Om een vierde dimensie te "maken" moeten we de kubus een vierde richting op slepen die we ons eigenlijk niet kunnen voorstellen door de beperking dat onze eigen ruimte driedimensionaal is. We moeten er dus een richting bij bedenken. Als we de kubus een eenheid in deze vierde richting slepen krijgen we de vierdimensionale *hyperkubus*.

De vierde dimensie is wel te illustreren, bijvoorbeeld met kleur. Je zou de vierde richting kunnen interpreteren als tijd. Maar om echt een idee van de 4d-kubus te krijgen, kunnen we deze het best projecteren op een vlak (zoals we dat ook bij de gewone kubus doen, het plaatje zelf in deze handleiding is immers tweedimensionaal). Dat kan er zo uit zien:



Projecties van een 4d hyperkubus.

Opgave 1.

Beantwoord de volgende vragen:

a. Hoeveel hoekpunten heeft de 4d-kubus?

b. Hoeveel ribben heeft de 4d-kubus?

c. Hoeveel zijvlakken heeft de 4d kubus?

d. Hoeveel "randkubussen" heeft de 4d kubus?

(Tip: Je kunt ze tellen of redeneren naar analogie. De serie punt – lijnstuk – vierkant - kubus is op te vatten als een serie kubussen van nul, één, twee en drie dimensies. Maak een tabel.)

Ruimte in getallen

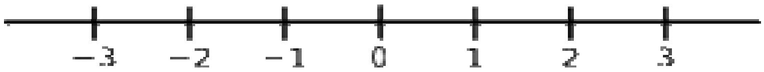
Ooit nagedacht over hoe een computer een punt in de ruimte aangeeft? Als je een computerspelletje speelt, zie je een poppetje in een tweedimensionale of misschien wel driedimensionale ruimte. Maar een computer rekent alleen maar met getallen. Daarvoor moet ruimte worden geformaliseerd.

De wiskundige en filosoof Euclides uit de Griekse oudheid was de eerste die meetkunde heeft geformaliseerd. Hij formuleerde *axioma's* (uitgangspunten) over de eigenschappen van punten, lijnen en cirkels in het vlak, van waaruit hij stellingen bewees.

Wij bewandelen een andere weg en gaan punten in de ruimte beschrijven met *coördinaten*. Dit idee stamt van de filosoof en wiskundige René Descartes. Door het gebruik van coördinaten kunnen we de stap naar 4, 5, of 6 dimensies maken. Sterker nog, als je het principe een maal onder de knie hebt, kun je eenvoudig over ruimtes van willekeurige dimensie praten.

De lijn E^1

De positie op een lijn kan worden aangegeven met een getal (coördinaat) tussen min oneindig ($-\infty$) en plus oneindig ($+\infty$). We noemen de lijn E^1 (van 1-dimensionale Euclidische ruimte). We hebben het ook wel over de getallenlijn.

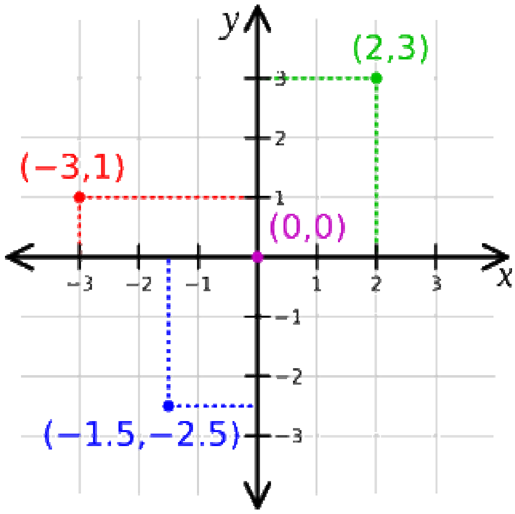


Een interval of lijnstuk kunnen we aangeven door de twee eindpunten *a* en *b*. We schrijven dan [a,b] voor de getallen tussen *a* en *b* (inclusief *a* en *b*). In de topologie wordt het interval vaak afgekort met I. De standaard keuze voor de eindpunten is 0 en 1.

$$I = [0,1]$$

Het vlak E^2

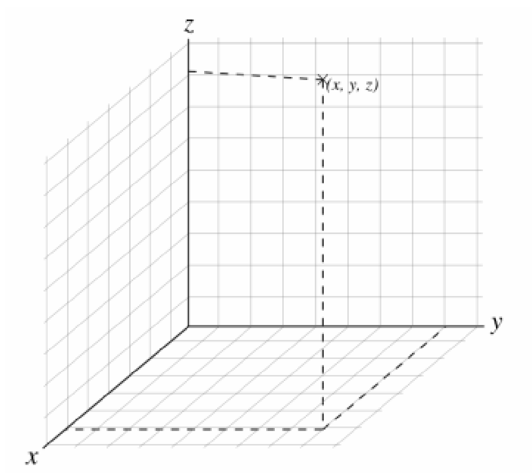
Een punt op een vlak kun je aangeven met twee coördinaten x en y door twee coördinaatassen te gebruiken. We schrijven het punt dan als (x, y).



Het punt (0,0) (het snijpunt van de twee coördinaatassen) wordt wel de *oorsprong* genoemd en soms aangegeven met de letter O.

De Euclidische 3d-ruimte E^3

Voor de driedimensionale ruimte hebben we drie coördinaatassen nodig. Een punt geven we aan als (x, y, z). De oorsprong O is het punt (0, 0, 0).



De Euclidische 4d ruimte en verder

Door coördinaatassen toe te voegen hebben we van de lijn het vlak en de driedimensionale Euclidische ruimte gemaakt. Deze procedure kunnen we voortzetten. Natuurlijk kunnen we ons de vierde coördinaatas niet meer zo goed voorstellen, maar we kunnen wel eenvoudig een extra getal toevoegen. Op die manier maken we, in elk geval abstract, E^4, E^5, of E^{732369}.

De vierdimensionale Euclidische ruimte E^4 heeft vier coördinaten. Vaak gebruiken we de letters x, y, z, w en noteren we punten als (x, y, z, w). Maar het kan ook handig zijn de coördinaatassen te nummeren en de coördinaten x_1, x_2, x_3 en x_4 te noemen (of soms x_0, x_1, x_2 en x_3).

In het algemeen is E^n de n-dimensionale Euclidische ruimte. Deze heeft n-coördinaten. Punten geven we algemeen aan als $(x_1, \ldots, x_n)$ of $(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

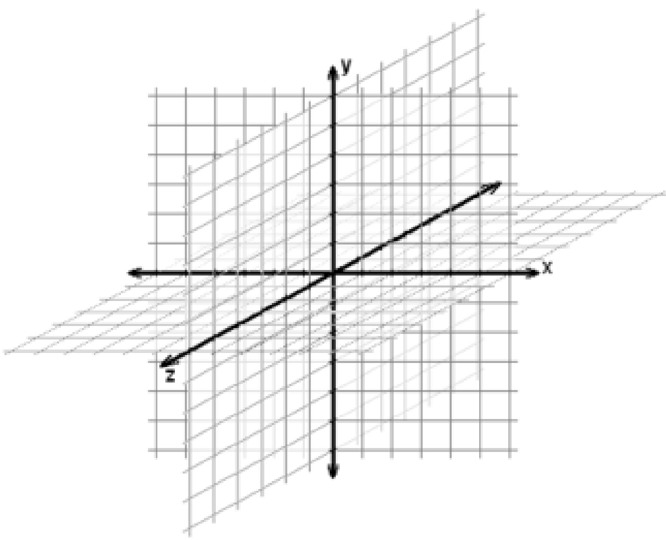
Opgave 2.

De hoekpunten van de kubus in E^3 zijn (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1) en (1, 1, 1). Geef de hoekpunten van de 4d-kubus in E^4.

Opgave 3.

We gaan een cirkel op een speciale manier inbedden in E^3.

a. Geef in het onderstaande plaatje het vlak van punten aan waarvoor geldt y = 0. Kleur dit vlak licht in of markeer het. Waarom noemen we dit ook wel het *xz*-vlak?



b. Geef ook het *xy*-vlak van punten aan waarvoor geldt z = 0 (gebruik een andere kleur/markering).

c. Geef nu *de lijn* van punten aan waarvoor geldt y = z = 0.

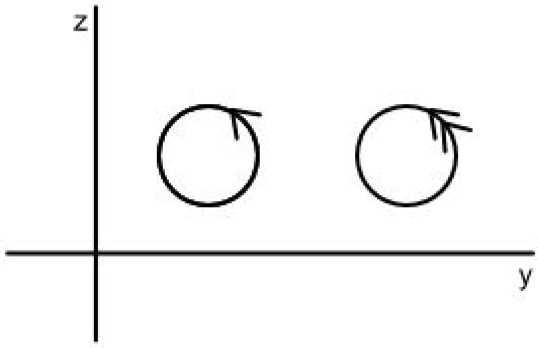
d. Teken twee punten op de lijn y = z = o. Verbind deze twee punten met een pad in het *xy*-vlak en ook met een pad in het *xz*-vlak.

We hebben nu een cirkel in E^3 ingebed met de eigenschap dat de ene helft in het vlak x = o ligt en de andere helft in het vlak y = o. In de volgende opgave gaan we K^2 inbedden in E^4 zonder zelfdoorsnijding.

Opgave 4.

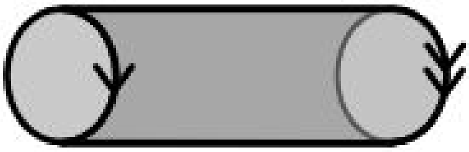
De fles van Klein kan niet zonder zelfdoorsnijding in drie dimensies worden ingebed. In vier dimensies lukt dit wel. Dit lijkt op het inbedden van de cirkel in de vorige opgave.

a. De vierdimensionale Euclidische ruimte E^4 heeft vier coördinaten, een punt wordt aangegeven als (x,y,z,w). We delen E^4 op in twee overlappende delen: de *xyz*-ruimte en de *yzw*-ruimte. Teken deze twee assenstelsels.
b. Neem de volgende twee cirkels in het *yz*-vlak over in zowel de *xyz*-ruimte als de *yzw*-ruimte.



c. Verbind de cirkels in de *xyz*-ruimte met de volgende pijp (zodat de pijlen kloppen).

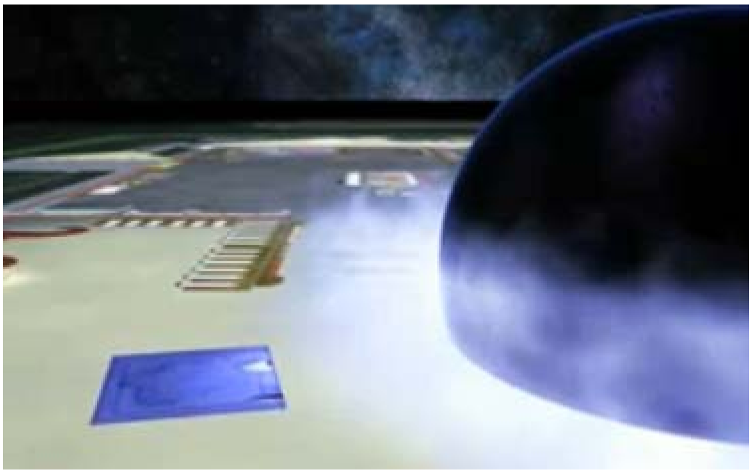
d. Verbind de cirkels in de *yzw*-ruimte met de volgende pijp. Let op de oriëntatie bij de uiteinden.



e. Laat zien dat de ruimte die je hebt gekregen de fles van Klein is en beredeneer dat er geen zelfdoorsnijdingen zijn.

Opgave 5.

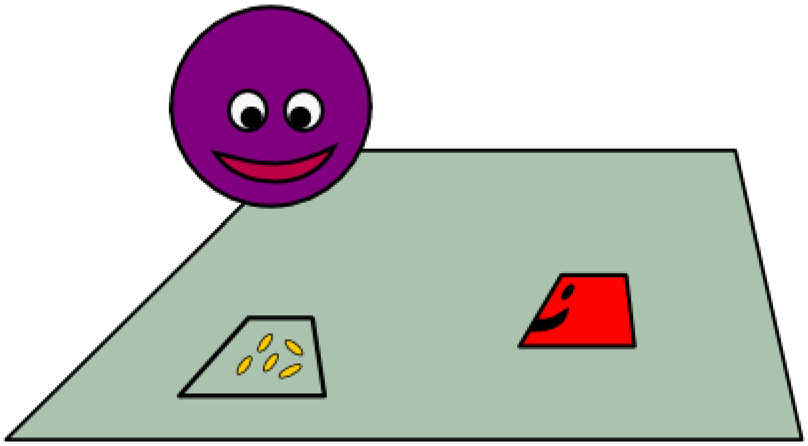
In het boek Flatland wordt A Square, een inwoner van Flatland, bezocht door een bol. Deze valt vanuit de derde dimensie het tweedimensionale Flatland binnen.



a. Teken een serie van plaatjes van de bol die door het vlak reist vanuit het perspectief van A Square. (Hint: je kunt wat A Square ziet, tekenen op een lijn)

Je kunt je misschien voorstellen dat dit een vreemde gewaarwording is voor A Square, hij snapt absoluut niet wat er aan de hand is. In een poging de derde dimensie uit te leggen raakt A Square nog veel verwarder. De bol pakt geld uit de kluis van A Square en legt dit vervolgens voor A Square neer.

b. Teken deze gebeurtenis met onderstaande plaatjes als beginpunt.

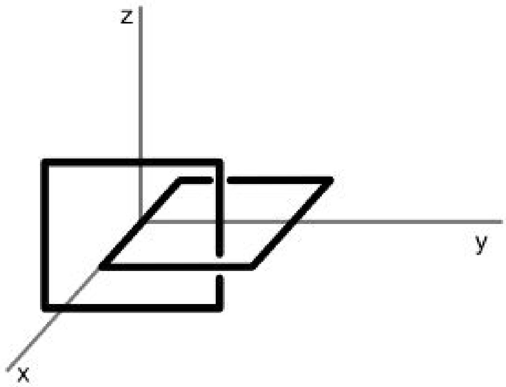


c. Beschrijf de gebeurtenis vanuit het perspectief van A Square.

Opgave 6.

Er kunnen gekke dingen gebeuren als er echt een vierde dimensie zou bestaan. Stel dat een vierdimensionaal wezen besluit ons te bezoeken. Zo'n wezen zou bijvoorbeeld de melk uit de koelkast kunnen pakken zonder de deur te openen. Ook zou hij de volgende twee ringen uit elkaar kunnen halen;

We maken het volgende schematisch model van de ringen in de *xyz*-ruimte:



Stel dat de *xyz*-ruime een deel is van de vierdimensionale *xyzw*-ruimte.

a. Teken de *yzw*-ruimte en de *xyw*-ruimte met de ringen.
b. Laat zien hoe je de vierde dimensie kunt gebruiken om de ringen los van elkaar in de *xyz*-ruimte te krijgen.

Opgave 7.

Lees het volgende stukje tekst van de website van CERN (*Organisation Européenne pour la Recherche Nucléaire*, een Europese organistatie die fundamenteel onderzoek doet naar elementaire deeltjes). Leg wat natuurkundigen willen verklaren als ze op zoek gaan naar tot nog toe verborgen dimensies.

Secret dimensions

In everyday life, we inhabit a space of three dimensions – a vast 'cupboard' with height, width and depth, well known for centuries. Less obviously, we can consider time as an additional, fourth dimension, as Einstein famously revealed. But just as we are becoming more used to the idea of four dimensions, some theorists have made predictions wilder than even Einstein had imagined.

String theory intriguingly suggests that six more dimensions exist, but are somehow hidden from our senses. They could be all around us, but curled up to be so tiny that we have never realized their existence.

Beyond the third dimension

Some string theorists have taken this idea further to explain a mystery of gravity that has perplexed physicists for some time – why is gravity so much weaker than the other fundamental forces? Does its carrier, the graviton, exist and where? The idea is that we do not feel gravity's full effect in the everyday world. Gravity may appear weak only because its force is being shared with other spatial dimensions.

To find out whether these ideas are just products of wild imaginations or an incredible leap in understanding will require experimental evidence. But how?

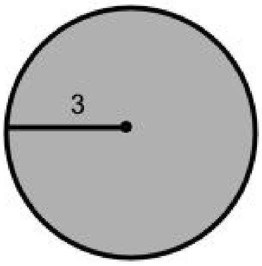
High-energy experiments could prise open the inconspicuous dimensions just enough to allow particles to move between the normal 3D world and other dimensions. This could be manifest in the sudden disappearance of a particle into a hidden dimension, or the unexpected appearance of a particle in an experiment. Who knows where such a discovery could lead!

Deelruimtes en vergelijkingen

Het grote nut van coördinaten is dat het meetkunde en algebra samenbrengt. Dat wil zeggen, een vergelijking als

$$x^2 + y^2 = 9$$

krijgt ineens een meetkundige betekenis. Het is de vergelijking voor een cirkel met straal 3.



Een cirkel met straal 3

De vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$ geeft in het algemeen een cirkel met straal r. Dit volgt uit de stelling van Pythagoras. Het oppervlak van een bol met straal r wordt gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Opgave 8.

Laat met behulp van de stelling van Pythagoras zien dat de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ een cirkel met straal 1 beschrijft.

Opgave 9.

Teken de figuren in het vlak behorende bij de volgende vergelijkingen:

a. $2x^2 + 3y^2 = 1$

b. $x^2 + y^2 \leq 4$

c. $2x + y^2 = 4$

d. $x^3 + y^3 = 1$

Opgave 10.

Bewijs dat de coördinaten van een punt op het boloppervlak van een bol met straal 1 in E^3 voldoen aan de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Tip: teken het juiste plaatje en pas twee keer Pythagoras toe.)

We kunnen de cirkel S^1 en de bolschil S^2 beschrijven in de Euclidische ruimte met behulp van vergelijkingen. Voor het gemak nemen we altijd 1 voor de straal. We kunnen de binnengebieden erbij nemen door = te vervangen door ≤. Zo beschrijven we cirkelschijf D^2 en de gevulde bol D^3. Dit geeft de volgende tabel:

Ruimte	**Vergelijking**
S^1	$x^2 + y^2 = 1$
D^2	$x^2 + y^2 \leq 1$
S^2	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
D^2	$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

Opgave 11.

Naar analogie met de cirkel en het boloppervlak is S^0, de 0-sfeer gedefinieerd door de vergelijking $x^2 = 1$.

a. Teken S^0 in de lijn.
b. Bedenk een definitie voor D^0. Wat is dit voor ruimte (topologisch)?

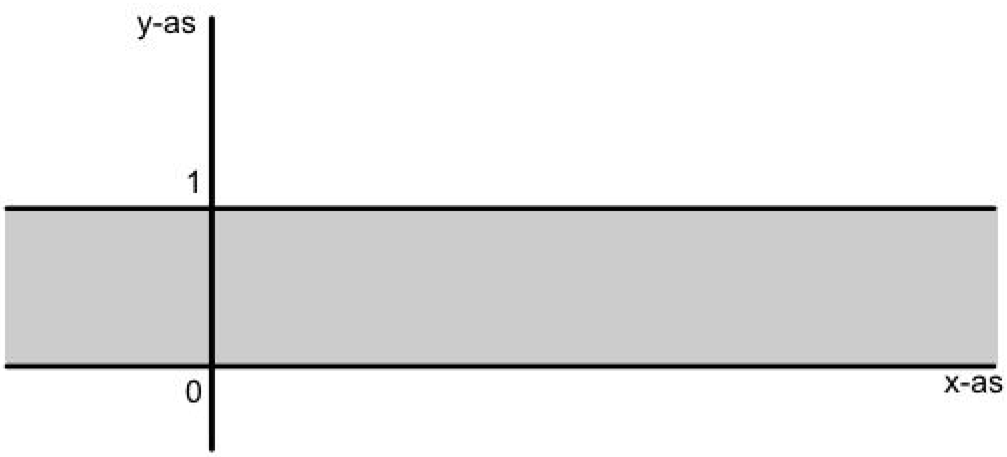
Cartesisch product

We hebben de hoger-dimensionale Euclidische ruimte gemaakt door telkens een coördinaatas toe te voegen. Maar de truc om coördinaten toe te voegen, beperkt zich niet tot de Euclidische ruimte.

We kunnen in het algemeen van twee ruimtes, A en B, een nieuwe ruimte maken waarvan de punten bestaan uit paren (a, b) met a een punt uit A en b een punt uit B. Deze ruimte noteren we met A x B en noemen we het **Cartesisch product** van A en B.

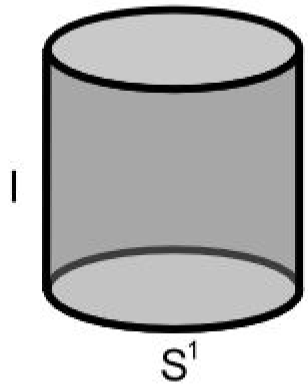
Dus in plaats van E^2 kunnen we schrijven $E^1 \times E^1$. We zeggen wel dat het vlak het product is van twee lijnen. Net zo is de 3d-ruimte het product van drie lijnen: $E^3 = E^1 \times E^1 \times E^1$.

Bekijk nu het product $E^1 \times I$. Hier nemen we van de tweede coördinaatas niet alle getallen, maar slechts de getallen in het interval $I = [0, 1]$. Het resultaat is een oneindig lange band met een rand onder (tweede coördinaat gelijk aan 0) en boven (tweede coördinaat gelijk aan 1).



We hebben nu aan de lijn E^1 een coördinaatas toegevoegd “van de vorm I”. Je kunt elk punt van E^1 x I beschrijven als een paar (x, y) met x een punt op E^1 (x is een getal met $-\infty < x < \infty$) en y een punt van I ($0 \leq y \leq 1$).

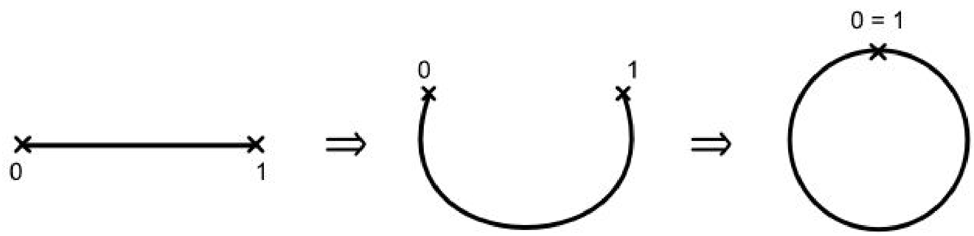
Dit kan ook voor niet-rechte “coördinaatassen”, bijvoorbeeld met de vorm van een cirkel. Het product E^1 x S^1 heeft een lijn en een cirkel als “coördinaatassen”. Wat je krijgt, is een cilinder! Een cilinder is zowel een “cirkel van lijnen” als een “lijn van cirkels”. Dit is een andere manier om te zeggen dat de cilinder een lijn en een cirkel als “coördinaatassen” heeft.



Een cilinder is een product van de cirkel $\mathbf{S}^1$ en het lijnstuk **I**

Opgave 12.

We gaan S^1 x S^1 onderzoeken. De cirkel kunnen we zien als een interval I waarvan we de uiteinden op elkaar geplakt hebben. We beschrijven daarom nu de punten van S^1 met de getallen 0 tot en met 1 waarbij we afspreken dat 0 = 1.



Het plakken van de cirkel S^1 uit het interval I.

Het product S^1 x S^1 kunnen we daarmee plakken uit I x I. Het plakken komt neer op de gelijkheden $(0, y) = (1, y)$ en $(x, 0) = (x, 1)$.

a. Teken I x I en geef vervolgens aan welke punten op elkaar geplakt zijn. Welke ruimte is S^1 x S^1?

b. S^1 x S^1 heeft twee coördinaatcirkels. Teken S^1 x S^1 als oppervlak in 3d waarbij je twee coördinaatcirkels aangeeft.

Opgave 13.

Welke ruimtes zijn dit? Maak tekeningen:

a. $S^1 \times I$

b. $S^1 \times D^1$

c. $S^0 \times S^1$

d. $I \times I \times I$

e. $S^1 \times \{a, b, c\}$ (de ruimte $\{a, b, c\}$ bestaat uit drie losse punten a, b en c)

f. $I \times S^1 \times \{a, b\}$

De dimensies van een fiets

Wiskundige ruimtes, zoals de cirkel, kunnen goed gebruikt worden als model. Bijvoorbeeld als **configuratieruimte** van een systeem. Dit is de ruimte van alle toestanden van het systeem.

Neem bijvoorbeeld een wijzer die 360° kan draaien. De stand van de wijzer (toestand van het systeem) kan worden aangegeven met een punt op de cirkel S^1. Een systeem dat alleen tussen twee punten heen en weer kan bewegen heeft configuratieruimte I.

Links: Systeem met S^1 als configuratieruimtje. Rechts: systeem met I als configuratieruimte.

Voor ingewikkelde systemen kan het bepalen van de configuratieruimte veel informatie geven. Configuratieruimtes spelen een cruciale rol bij *motion planning*, het zelfstandig plannen van bewegingen door een robot.

Als we twee systemen combineren zonder dat ze elkaar beïnvloeden, is de configuratieruimte van het gecombineerde systeem het Cartesisch product van de configuratieruimtes van de twee systemen. Dus stel systeem 1 heeft configuratieruimte A en systeem 2 heeft configuratieruimte B. Het gecombineerde systeem heeft configuratieruimte A x B. Als systeem 1 in toestand a zit (punt van A), en systeem 2 in toestand b (punt van B), dan is de totale toestand immers aan te geven als (a, b).

Als voorbeeld bekijken we de volgende fiets:

De configuratieruimtes van de bewegende onderdelen modelleren we zoals aangegeven in de volgende tabel:

Onderdeel	**Configuratieruimte**
Voorwiel	S^1
Achterwiel	S^1
Trappers	S^1
Pedaal links	S^1
Pedaal rechts	S^1
Stuur	S^1
Handrem links	I
Handrem rechts	I

De configuratieruimte van deze fiets is dus $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 \times I \times I$, een 8-dimensionale ruimte.

Opgave 14.

Bepaal de configuratieruimte van een mixer met drie standen en twee draaiende onderdelen. Kun je deze tekenen?

Opgave 15.

Zoek zelf een object uit en bepaal de configuratieruimte.

Soms kunnen eenvoudig ogende systemen verassend complexe configuratieruimtes hebben. Zie voor meer hierover de website:

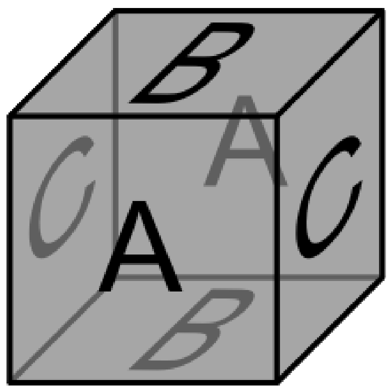
http://www.math.toronto.edu/~drorbn/People/Eldar/thesis/default.htm.

6. 3D

We hebben gezien dat we alle gesloten oppervlakken kunnen opsommen in twee rijen, de oriënteerbare en de niet-oriënteerbare oppervlakken. De Eulerkarakteristiek is voldoende om binnen deze rijen alle oppervlakken uit elkaar te houden. Voor driedimensionale ruimtes is de situatie veel lastiger. In deze les zullen we een aantal bekende driedimensionale ruimtes introduceren en onderzoeken.

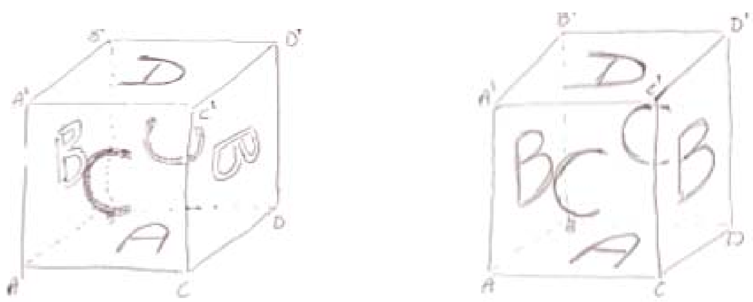
De 3-torus T^3

De torus kan gemaakt worden door tegenoverliggende zijden van een vierkant op elkaar te plakken. Op dezelfde manier kunnen we tegenoverliggende vlakken van een kubus op elkaar plakken. De ruimte die we dan krijgen, noemen we de 3-torus (T^3). Plak tegenoverliggende zijden op elkaar zodat tegenoverliggende punten zijn geïdentificeerd:



De “coördinaatassen” van de 3-torus kunnen we net als bij de torus herkennen als cirkels. De 3-torus is dus het product van drie cirkels: $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$.

Natuurlijk zijn de vlakken van een kubus op meer manieren te plakken. Poincaré gebruikte in zijn werk een aantal voorbeelden van ruimtes die vanuit een vierkant kunnen worden geconstrueerd zoals hieronder afgebeeld:



Kubusruimtes

Opgave 1.

Het programma Curved Spaces van Jeff Weeks, te downloaden op geometrygames.org, geeft een visualisatie van enkele gesloten driedimensionale ruimtes.

a. Laad de 3-torus in Curved Spaces (onder *basic*). Herken je het plakschema?

b. Gebruik de applicatie om de volgende ruimtes te onderzoeken (onder *flat*). Achterhaal de plakschema's en teken ze. Telkens zijn tegenoverliggende zijdes geïdentificeerd.

Half turn *Klein cubic* *Quarter turn*

c. Experimenteer met een aantal van de andere ruimtes.

De 3-sfeer S^3

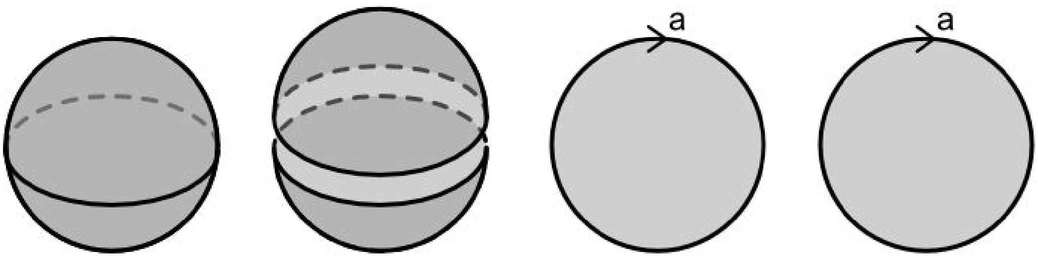
Zoals we de cirkel S^1 kunnen voorstellen als de punten op afstand 1 van de oorsprong in het vlak, en de 2-sfeer S^2 als de punten op afstand 1 van de oorsprong in E^3, kunnen we ook een ruimte maken door de punten op afstand 1 van de oorsprong in E^4 samen te nemen. Deze ruimte noemen we de 3-sfeer S^3. De definiërende vergelijking is $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$.

De 3-sfeer speelt de hoofdrol in het vermoeden van Poincaré. Zijn vermoeden stelt dat S^3 te herkennen is aan een enkele eigenschap, namelijk *enkelvoudige samenhang*. Dus met wat voor ingewikkelde bouwplaat, vergelijking of andere constructie je een ruimte ook maakt, als je weet dat deze driedimensionaal, gesloten en *enkelvoudig samenhangend* is heb je de 3-sfeer geconstrueerd, zo stelt het vermoeden. We gaan hier in het volgende hoofdstuk op verder.

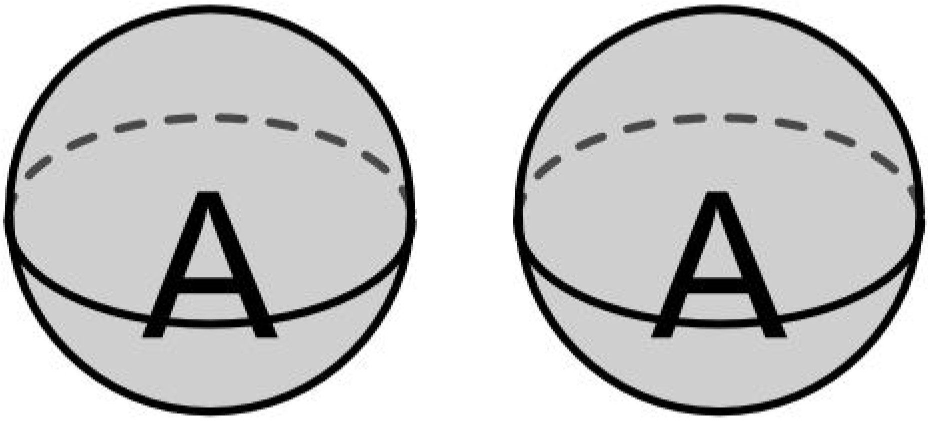
Maar wat moeten we ons bij S^3 voorstellen? We zullen proberen daar een beeld van te krijgen door S^3 op verschillende manieren te ontleden, naar analogie met S^2 en S^1.

Twee bollen

We kunnen de 2-sfeer voorstellen als een noordelijk en zuidelijk halfrond, aan elkaar geplakt langs de evenaar.



Op vergelijkbare wijze kunnen we S^3 voorstellen als twee gevulde bollen (kopieën van D^3) op elkaar geplakt op de schil. Plakken komt neer op de volgende eigenschap: als je bij de ene bol op een bepaald punt door de randsfeer (schil) naar buiten gaat kom je op hetzelfde punt van de randsfeer bij de andere bol naar binnen.



De 3-sfeer. Het plakken van de randen (twee keer een bolschil) hebben we aangegeven met een grote letter A.

Opgave 2.

We maken het opsplitsen van S^3 als twee bollen precies. Definieer S^3 als de punten (x, y, z, w) van E^4 die voldoen aan de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$.

a. Wat krijg je als je één van de E^4-coördinaten, zeg w, gelijk aan 0 stelt in S^3? Vergelijk dit met de evenaar van S^2.

b. Wat krijg je als je w gelijk aan 1 stelt?

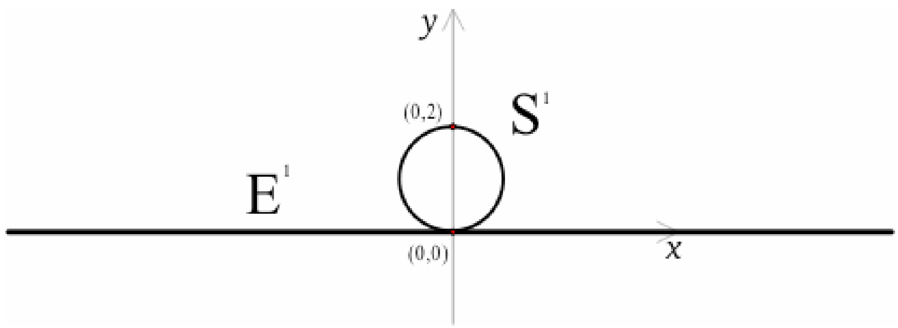
c. Wat krijg je als je w een vaste waarde geeft anders dan 0 of 1? Bekijk deze situatie voor $w = 1/4, 1/2$ en $3/4$.

d. Deel nu S^3 op in een deel met $w \leq 0$ en een deel met $w \geq 0$. Wat is de vorm van deze delen? Leg het verband met de voorstelling hierboven van S^3.

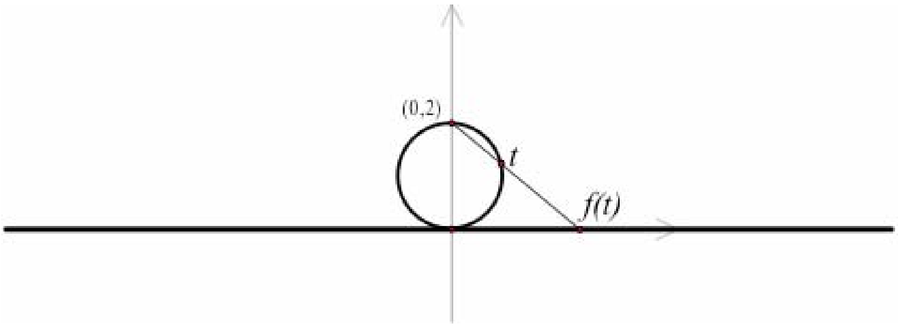
Stereografische projectie

Als we een punt weglaten uit de cirkel S^1, krijgen we een ruimte die topologisch gelijk is aan E^1. Dit is te zien via **stereografische projectie.**

Stel de lijn E^1 voor als de x-as in het vlak. Stel S^1 voor als de cirkel met straal 1 rond het middelpunt (0, 1) in het vlak. De x-as raakt de cirkel in het punt (0, 0).



Identificeer nu een punt van x S^1 met een punt $f(x)$ van E^1 door een lijn te trekken door het punt x en de "Noordpool" (0,2) van S^1. Het snijpunt van de lijn met E^1 is het punt $f(x)$ (zie illustratie).

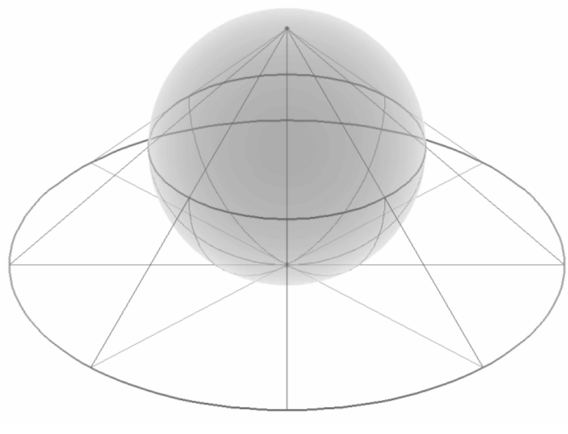


We kunnen op deze manier aan elk punt van de cirkel, behalve de Noordpool, een punt van de lijn toekennen. Dit laat zien dat als je de cirkel doorknipt, je deze kunt uitrekken tot een lijn.

De toekenning van een punt $f(t)$ van E^1 aan een punt t van S^1 heet *het afbeelden van t op f(t)*. Het begrip **afbeelding** komt veel voor in de wiskunde. Stereografische projectie, hier genoteerd met f, is een voorbeeld van een afbeelding. Afbeeldingen die topologische gelijkheid laten zien noemen we **homeomorfismen**. We zeggen dat stereografische projectie een homeomorfisme geeft van $S^1 - \{punt\}$ naar E^1, wat we noteren als $f: S^1 - \{punt\} \to E^1$.

We concluderen dat S^1 minus een punt gelijk is aan E^1. Dit betekent ook dat E^1 met "een punt op oneindig" gelijk is aan S^1.

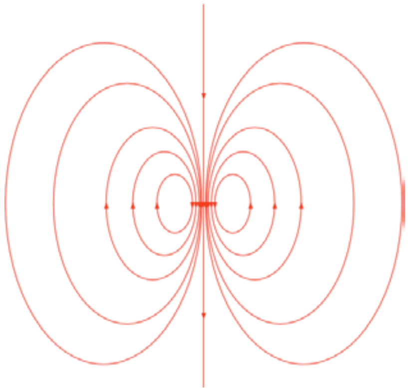
Ditzelfde kunnen we doen voor S^2. We kennen nu een punt $f(t)$ van E^2 aan een punt t van S^2 door een lijn door de Noorpool van S^2 en het punt t te trekken. Dit geeft weer een identificatie van alle punten van S^2 met een uniek punt van E^2, behalve voor de Noordpool. *We concluderen dat $S^2 = E^2 + \{punt\}$.*



Ook voor S^3 kunnen we deze constructie uitvoeren. Als we een punt uit S^3 weghalen krijgen we, topologisch gezien, E^3. *We kunnen daarom vaak aan S^3 denken als de Euclidische ruimte E^3.* Het punt op oneindig houden we dan even in ons achterhoofd.

Opgave 3.

Welke ruimte krijg je als je een gevulde torus S^1 x D^2 (donut met binnenkant) weghaalt uit S^3?
We stellen $S^{1`}$ x D^2 voor in E^3 als een ongeknoopte donut. En S^3 als E^3 + {*punt*}. Het volgende plaatje van een magneetveld in E^3 kan verhelderend werken.

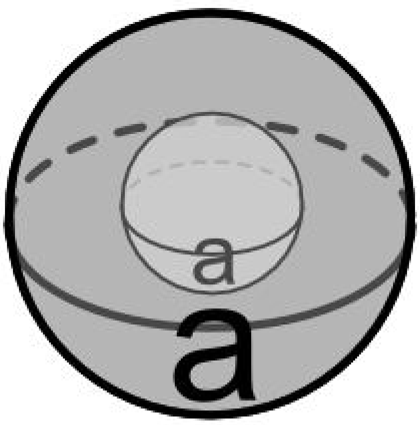


De ruimte S^1 x S^2

De ruimte S^1 x S^2, het product van een cirkel en een bolschil is als volgt voor te stellen:

- Begin met een gevulde bol D^3.
- Verwijder een kleinere bol uit het binnenste van D^3.
- Plak de twee S^2 randen op elkaar.

Je hebt dus een opgevulde bolschil met de eigenschap dat als je deze door de binnenste rand verlaat, je er door de bovenste rand weer binnen komt.



S^1 x S^2 als een gevulde bol D^3, waaruit een kleinere gevulde bol is verwijderd. De bolschil aan de binnenkant en aan de buitenkant zijn op elkaar geplakt.

Opgave 4.

In het vorige hoofdstuk zagen we al dat een vierdimensionaal wezen twee ringen los kon maken. In de ruimte $S^1 \times S^2$ zijn zelfs binnen de ruimte bepaalde ringen los te koppelen.

a. Neem het model van $S^1 \times S^2$ als opgevulde bolschil met geplakte binnen- en buitenkant over.

b. De Noordpool van S^2 geven we even aan met N. Maak een ring in $S^1 \times S^2$ door alle kopieën van de Noordpool te nemen. Dit zijn dus alle punten (t, N) waarbij t de punten van S^1 doorloopt. Teken deze ring in je plaatje van $S^1 \times S^2$

c. Houdt nu een punt van S^1 vast, zeg t_o,en trek een ring in $\{t_o\} \times S^2$ (de kopie van S^2 in $S^1 \times S^2$ met S^1-coördinaat gelijk aan t_o) om de Noordpool. Teken ook deze in je weergave van $S^1 \times S^2$.

d. Beargumenteer dat deze ringen niet vast zitten.

Zorg dat je ring in $\{t_o\} \times S^1$ zich geheel op het Noordelijk halfrond bevindt.

e. Teken de twee ringen in het product van het Noordelijk halfrond en S^1, waarbij je dit product voorstelt als gevulde torus.

f. Zijn er ook "echt gekoppelde" ringen in $S^2 \times S^1$. Zo ja, teken een voorbeeld.

7. Het Poincarévermoeden

Poincaré was een van de pioniers op het gebied van de topologie. Hij hield zich bezig met de vorm van driedimensionale ruimte. Na zes lessen over ruimte is het tijd om terug te keren naar het beroemde vermoeden dat naar Poincaré is vernoemd.

Het vermoeden

Het Poincarévermoeden luidt als volgt:

Elke enkelvoudig samenhangende, gesloten 3-variëteit is homeomorf met de 3-sfeer S^3.

Het enige nieuwe begrip in dit vermoeden is *enkelvoudige samenhang*, de andere begrippen herhalen we nu nog kort;

a. Een 3-variëteit is een ruimte die rondom elk punt lijkt op een stukje van E^3. Lokaal is een 3-variëteit dus niet te onderscheiden van de driedimensionale Euclidische ruimte.
b. We noemen een variëteit gesloten als deze compact is en geen rand heeft. Compactheid is ongeveer gelijk aan eindigheid.
c. Twee ruimten zijn homeomorf wanneer er een homeomorfisme bestaat tussen de twee ruimten. Een homeomorfisme is een “mooie” afbeelding die topologische gelijkheid aanduidt.
d. S^3 is de driedimensionale sfeer. We kunnen deze beschrijven als deelruimte van E^4, waarbij we de coördinaten x,y,z,w gebruiken. De 3-sfeer bestaat uit alle punten die voldoen aan de volgende vergelijking; $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$.

Een ruimte heet enkelvoudig samenhangend wanneer deze “geen gaten” bevat. Maar voor een wiskundige moet “geen gaten” dan wel intrinsiek geformuleerd zijn. Poincaré wilde deze gaten onderzoeken door “lusjes” samen te trekken in de ruimte. Wanneer de lusjes nooit blijven hangen en altijd helemaal samengetrokken kunnen worden, zijn er blijkbaar geen gaten in de ruimte.

Het vermoeden van Poincaré is sinds 2003 geen vermoeden meer, maar een stelling. Dankzij werk van de Russische wiskundige Grigori Perelman is het Poincarévermoeden bewezen.

Grigori Perelman

Voorgeschiedenis

Henri Poincaré werkte rond 1900 aan de fundamenten van wat later combinatorische topologie en nog later algebraïsche topologie zou gaan heten. Hij zette zijn werk uiteen in het boek *Analysis Situs*, dat hij nog aanvulde met een aantal supplementen.

Poincaré beweerde op een gegeven moment dat alleen de "homologie", zoiets als de Eulerkarakteristiek, voldoende is om een 3-sfeer te herkennen. Hij dacht dat je, als je een willekeurige 3d gesloten variëteit zou maken, de homologie uit kon rekenen en op de homologie van de 3-sfeer zou uitkomen, zeker zou weten dat je onbewust de 3-sfeer had geconstrueerd. Deze claim blijkt niet te kloppen.

Hij kwam er zelf achter dat hij het mis had, door een tegenvoorbeeld te geven. Vervolgens stelde hij de volgende vraag:

Zou het zo kunnen zijn dat er een gesloten 3-variëteit bestaat die enkelvoudig samenhangend is, maar niet homeomorf met de 3-sfeer?

Poincaré heeft zelf nooit een antwoord gegeven, maar het ontkennende antwoord op deze vraag is het Poincarévermoeden gaan heten.

Hersenkrakers

In de bijna honderd jaar dat het Poincarévermoeden onbewezen heeft bestaan, hebben veel wiskundigen zich er het hoofd over gebroken. Soms dacht iemand het bewezen te hebben, maar telkens bleek het bewijs toch niet te kloppen. Nieuwe, vermeende bewijzen werden sceptisch ontvangen door de wiskundige gemeenschap. Telkens terecht. De wiskundige John R. Stallings schreef zelfs een artikel met de titel *How not to prove the Poincaré conjecture*.

Rond 1980 zorgde de geniale William Thurston voor een revolutionaire versnelling van het begrip van driedimensionale ruimtes. Hij wist met meetkundige technieken een heel nieuw licht op driedimensionale topologie te werpen. Zijn resultaten motiveerden hem tot het formuleren van een vermoeden dat bekend staat als het Thurston vermeetkundigingsvermoeden. Het bijzondere van dit vermoeden is dat het een classificatie voorstelt van *alle* gesloten 3d variëteiten, een beetje zoals wij de gesloten oppervlakken hebben geclassificeerd, maar dan meetkundig. Het is een *groter* vermoeden dan dat van Poincaré, in de zin dat het het Poincarévermoeden impliceert.

William Thurston

Dankzij de arbeid van veel wiskundigen kwam men verder met het vermeetkundigingsvermoeden van Thurston. Ook Grigori Perelman was in deze context aan het werk. In 2002 en 2003 publiceerde hij drie artikelen op het internet. Deze brachten een schok teweeg in de wiskundige gemeenschap. Hoewel de artikelen erg beknopt en maar voor weinigen te lezen waren, leek het er op dat ze een bewijs van het Poincarévermoeden gaven en zelfs van het vermeetkundigingsvermoeden.

Perelman weigert prijzen

Drie jaar lang zijn kenners in het vakgebied bezig geweest om de artikelen van Perelman helemaal uit te pluizen. Elk argument hielden zij onder de loep. Alle tussenstappen werden ingevuld. Maar het bewijs hield stand. Het Poincarévermoeden was bewezen.

Perelman kreeg voor zijn werk de hoogste onderscheiding in de wiskunde, de Fields Medal - vergelijkbaar met de Nobelprijs. Maar ondanks aandringen van de organisatie weigerde hij de prijs in ontvangst te nemen. Hij was zelfs niet op de ceremonie.

Het Poincarévermoeden was bovendien een van de zogenaamde Millenniumproblemen van het Clay Mathematics Institute. Voor het bewijs staat een miljoen dollar klaar. Maar Perelman zal ook die prijs niet ophalen.

De methode

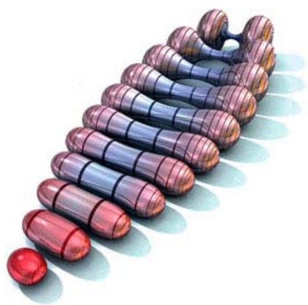
Het bewijs dat Perelman uteindelijk leverde voor het Poincarévermoeden lijkt weinig op de wiskunde die we in deze module hebben behandeld. Het is op een bepaalde manier dan ook een gruwel voor veel topologen.

In het bewijs begint Perelman heel algemeen met *een* driedimensionale ruimte. Hij bekijkt deze niet alleen topologisch, maar ook meetkundig. De ruimte kan echter allerlei rare krommingen hebben; zowel topologisch als meetkundig kan de ruimte vreemd in elkaar steken.

Vervolgens past hij de **Ricciflow** toe op de meetkunde van de ruimte. Deze door Richard Hamilton geïntroduceerde methode strijkt de kromming van de ruimte langzaam glad. Dat wordt wiskundig weergegeven in een dynamisch model zoals natuurkundigen dat veel gebruiken, bijvoorbeeld om de verspreiding van warmte door een medium te moduleren.

Doordat de kromming steeds egaler verdeeld wordt, krijg je op den duur stukken die mooi egaal gekromd zijn. Deze stukken zijn dan te herkennen aan de meetkunde die ze bezitten - zoals geformuleerd in Thurston's vermeetkundigingsvermoeden.

Maar tussen de egaal gekromde stukken kunnen allerlei vreemde dingen gebeuren, als de kromming oneindig wordt. Wiskundigen noemen dat singulariteiten. Ze vinden dat meestal enge dingen. Perelman heeft laten zien dat de singulariteiten van de Ricciflow niet té eng zijn: hij knipt de singulariteiten netjes weg. De door hem geïntroduceerde methodes zijn voor de wiskundige gemeenschap van groot belang.



Eindopdrachten

Alle lesstof is hiermee behandeld. Hieronder volgen nog drie eindopdrachten. Deze kunnen dienen als basis voor een werkstuk of presentatie. Ze bestaan elk uit een wiskundig en een historisch deel. Het wiskundige deel van de eerste opgave gebruikt alleen de lesstof, de andere twee gaan zelfs wat verder. Bij elke opgave worden bronnen gegeven.

Eindopdracht 1. **Platonische lichamen en het onstaan van het Poincarévermoeden.**

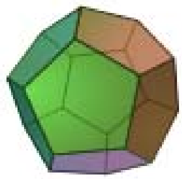
Deze eindopgave bestaat uit twee delen. Het eerste deel is voornamelijk wiskundig terwijl het tweede deel meer historisch is. Het eerste gedeelte gaat over Platonische lichamen en het tweede deel gaat over het ontstaan van het Poincarévermoeden.

Deel I: Platonische lichamen

Platonische lichamen zijn regelmatige veelvlakken. De volgende eigenschappen zijn kenmerkend voor Platonische lichamen:

1. elk vlak is een regelmatige veelhoek;
2. elke ribbe wordt gedeeld door twee vlakken;
3. in alle hoekpunten komen evenveel ribben samen.

Voorbeelden van Platonische lichamen zijn de kubus en de dodecaëder (zie het onderstaande plaatje).



In deze opgave onderzoeken we wat de Platonische lichamen zijn.

a. De Eulerkarakteristiek van de bolschil S^2 is 2. Laat dit zien.

Stel we hebben een Platonisch lichaam opgebouwd uit **gelijkzijdige driehoeken**.
Met n geven we het aantal driehoeken aan.
Met k geven we het aantal ribben dat bij elkaar komt in een hoekpunt aan.
Met F noteren we het totale aantal vlakken.
Met E noteren we het totale aantal ribben.
Met V noteren we het totale aantal hoekpunten.

F, E en V kun je uitdrukken in n en k. Voor F is dit eenvoudig: $F = n$.

b. Beredeneer: $E = 1\frac{1}{2}n$.

c. Beredeneer: $V = \dfrac{3n}{k}$.

d. Waarom geldt de volgende gelijkheid?

$$n - 1\tfrac{1}{2}n + \frac{3n}{k} = 2$$

e. Toon aan dat de gelijkheid van vraag d kan worden herleid tot

$$n = \frac{4k}{6-k}$$

f. Er komen minimaal drie ribben samen in de hoekpunten van een Platonisch lichaam. Bepaal alle oplossingen van de gelijkheid bij vraag e. die voor Platonische lichamen kunnen gelden.

g. Bepaal *F*, *E* en *V* voor een Platonisch lichaam dat is opgebouwd uit *n* **vierkanten**.

h. Laat *k* weer het aantal ribben zijn dat samenkomt in een hoekpunt.

i. Leid een vergelijking af voor *n* in termen van *k* (net zoals bij vraag e) en geef de oplossingen die voor Platonische lichamen kunnen gelden.

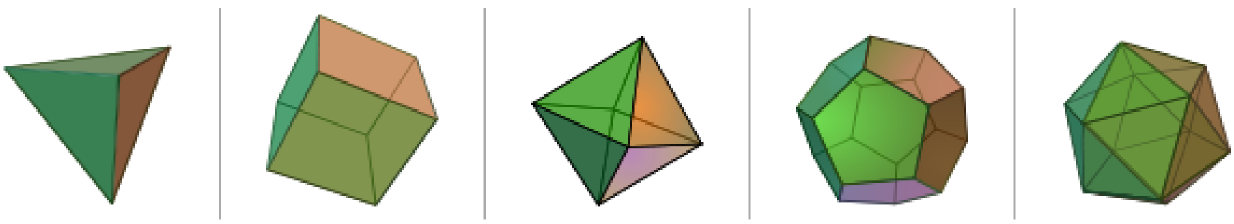
j. Herhaal vraag g en h voor een Platonisch lichaam dat is opgebouwd uit *n* **regelmatige vijfhoeken**.

k. Geef de formule van *n* in termen van *k* voor een Platonisch lichaam dat is opgebouwd uit *n* **regelmatige zeshoeken**. Hoeveel “goede” oplossingen heeft deze vergelijking?

l. Bestaan er Platonische lichamen met zeshoekige vlakken? En met vlakken met meer dan zes hoeken? Verklaar je antwoord.

m. Hieronder staan Platonische lichamen afgebeeld. Zijn dit ze allemaal? Verklaar je antwoord met behulp van je eerdere bevindingen.

n. Zoek uit hoe deze Platonische lichamen heten.



Deel II: Het ontstaan van het Poincarévermoeden

Bronnen:

I. http://nl.wikipedia.org/wiki/Vermoeden_van_Poincaré

II. Het boek: The Poincaré Conjecture van Donal O'Shea

III. Het artikel *'Towards the Poincaré Conjecture and the Classification of 3-manifolds* ' van John Milnor. Dit is te downloaden op:

http://www.ams.org/notices/200310/fea-milnor.pdf

IV. De applicatie '*Curved Spaces*' op www.geometrygames.org

V. Hoofdstuk 16 uit Jeff Weeks's boek '*The Shape of Space*'.

Vragen:

m. Welke beroemde onjuiste claim maakte Poincaré in 1900? (Je kunt eventueel gebruik maken van de wiskundige woordenlijst onderaan dit hoofdstuk.)

n. Welk Platonisch lichaam gebruikte Poincaré zelf om een tegenvoorbeeld van deze claim te geven? (deze ruimte wordt vaak de Poincaré homologie sfeer genoemd, kijk in '*The Shape of Space*')

o. Zoek uit op welke manier de zijden van dit Platonisch lichaam op elkaar geplakt worden om deze ruimte te vormen. Maak hier een plaatje van.

p. Bekijk deze ruimte in de *Curved Spaces* applicatie (onder Basics), denk je dat deze ruimte orienteerbaar is? (Hint: let op de draaiing van de aarde.)

q. Welke vraag stelde Poincaré zich, waarvan een positieve variant later bekend kwam te staan als het vermoeden van Poincaré?

Eindopdracht 2. **Enkelvoudige Samenhang en het Poincarévermoeden in hogere dimensies.**

Deze eindopgave bestaat uit twee delen. Het eerste deel is wiskundig en het tweede deel historisch. Het wiskundige gedeelte gaat over enkelvoudige samenhang terwijl het historische gedeelte over de voortgang gaat van het Poincarévermoeden in de tweede helft van de 20e eeuw.

Deel I: Enkelvoudige samenhang

Zoek uit wat enkelvoudige samenhang betekent. Kijk bijvoorbeeld naar de volgende bronnen:

a. http://en.wikipedia.org/wiki/Simply_connected_space - de Engelse Wikipediasite is een stuk informatiever dan de Nederlandse

b. http://www.britannica.com/EBchecked/topic/599686/topology/258070/Basic-concepts-of-general-topology

c. Het stukje '*The idea of the fundamental group*' in de inleiding hoofdstuk 1 van Allan Hatchers boek 'Algebraic Topology' geeft een idee over paden in ruimten. Te downloaden op:

http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATchapters.html.

d. De wiskundige woordenlijst aan het eind van dit hoofdstuk (Nederlands – Engels).

Beantwoord verder de volgende vragen:

a. Geef een intuïtieve uitleg van enkelvoudige samenhang.

b. Is enkelvoudige samenhang een intrinsieke of extrinsieke eigenschap? Verklaar je antwoord.

c. Leg uit dat S^1 niet enkelvoudig samenhangend is, maar S^2 wel.

d. Welke gesloten oppervlakken zijn enkelvoudig samenhangend?

e. Waarom is $S^1 \times S^2$ niet enkelvoudig samenhangend?

f. Is S^3 enkelvoudig samenhangend?

g. Wat is het Poincarévermoeden in twee dimensies?

h. Ga na dat het Poincarévermoeden in twee dimensies klopt. Welke stelling uit de syllabus heb je hiervoor nodig? Leg het zorgvuldig uit.

Deel II: Het Poincarévermoeden in hogere dimensies.

We hebben hierboven gezien dat we het Poincarévermoeden kunnen 'vertalen' van drie naar twee dimensies. Er zijn ook analoge stellingen in hogere dimensies. Bekijk de volgende bronnen:

e. http://nl.wikipedia.org/wiki/Vermoeden_van_Poincaré

f. Het boek 'The Poincaré Conjecture' van Donal O'Shea, met name de paragraaf *Four and more dimensions* in hoofdstuk 13.

g. Het artikel *'Towards the Poincaré Conjecture and the Classification of 3-manifolds'* van John Milnor. Dit is te downloaden op:

http://www.ams.org/notices/200310/fea-milnor.pdf

Beantwoord de vragen;

i. Welke wiskundigen hebben een fout bewijs van het Poincarévermoeden geleverd?

j. Hoe luidt het Poincarévermoeden in 4 dimensies?

k. Welke extra aanname wordt hier gemaakt?

l. Laat n een willekeurig getal zijn groter of gelijk aan 4, hoe luidt het n-dimensionale Poincarévermoeden?

m. Het bewijs van het tweedimensionale Poincarévermoeden was al bekend voordat het vermoeden bestond, in welke dimensie(s) werd het eerstvolgende bewijs gevonden? Door wie werd dit gevonden?

n. In welke dimensie(s) bewees Michael Freedman het Poincarévermoeden?

o. Geef een verklaring voor het feit dat de oplossing in hogere dimensies makkelijker was dan in dimensie drie.

Eindopdracht 3. **Niet-Euclidische meetkundes en de oplossing van het vermoeden van Poincaré.**

Deze eindopgave bestaat uit twee delen. Het eerste deel is voornamelijk wiskundig, terwijl het tweede deel meer historisch is. Het eerste gedeelte gaat over niet-Euclidische meetkundes, het tweede deel gaat over het bewijs van het Poincarévermoeden. Dit is de moeilijkste van de drie eindopdrachten.

Deel I: Niet-Euclidische meetkunde

Gebruik de volgende bronnen en beantwoord de vragen.

I. http://members.home.nl/pascal.wissink/niet_euclidische_meetkunde/web/niet%20euclidische%20meetkunde_web.htm#I.

II. Het boek 'The Shape of Space' van Jeff Weeks.

III. Het spel *Hyperbolic Games*, te downloaden op

www.geometrygames.org/HyperbolicGames/index.html

Vragen:

a. Welk postulaat van Euclides wordt geschonden door niet-Euclidische meetkundes?

b. Hoe heten de twee belangrijkste niet-Euclidische meetkundes?

c. Lees hoofdstuk 9 en 10 uit *'The Shape of Space'* van Jeff Weeks en maak alle vragen in deze hoofdstukken.

d. Speel *Hyperbolic Games*. Waarom beweegt de muis zo vreemd?

Deel II: Het bewijs van het Poincarévermoeden.

Gebruik de volgende bronnen en beantwoord de vragen.

IV. http://nl.wikipedia.org/wiki/Vermoeden_van_Poincaré

V. http://en.wikipedia.org/wiki/Geometrization_conjecture

Alle gesloten oppervlakken hebben een unieke meetkunde. De bol en het projectieve vlak hebben een sferische meetkunde. De torus en fles van Klein hebben een Euclidische meetkunde. Alle andere oppervlakken hebben een hyperbolische meetkunde.

Het vermoeden van Poincaré kan vertaald worden naar 2 dimensies. Het stelt dan:

Elke enkelvoudig samenhangende, gesloten 2-variëteit is homeomorf met de 2-sfeer S^2.

De enige 2-variëteit met Euclidische meetkunde die enkelvoudig samenhangend is, is het Euclidische vlak, E^2. De enige enkelvoudig samenhangende 2-variëteit met hyperbolische meetkunde is het hyperbolische vlak, H^2.

c. Waarom voldoen deze twee oppervlakken niet aan het vermoeden van Poincaré? (Hint: zoek de definitie van gesloten op).

d. De oplossing van het vermoeden van Poincaré kwam in 1982 opeens een stuk dichterbij. Welke wiskundige bedacht toen het '*vermeetkundigingsvermoeden*'?

e. In tweedimensionale ruimtes bestaan precies drie verschillende meetkundes: elliptische/sferische, Euclidische en hyperbolische. Hoeveel verschillende meetkundes bestaan er in 3-dimensies? Welke meetkundes komen je bekend voor?

f. Wederom geldt dat voor alle verschillende meetkundes er precies één enkelvoudig samenhangende 3-variëteit is met die meetkunde. Welke eigenschap vermoed je dat de 3-sfeer als enige van deze ruimten bezit?

Het vermeetkundigingsvermoeden beweert dat elke 3-variëteit op een standaard manier op te delen is in een eindig aantal stukken die allemaal een unieke meetkunde dragen. Een 3-variëteit is alleen enkelvoudig samenhangend en gesloten wanneer al deze stukken ook enkelvoudig samenhangend en gesloten zijn.

g. Leg uit dat wanneer bewezen wordt dat het vermeetkundigingsvermoeden waar is, het Poincaré-vermoeden ook bewezen is.

h. Hoe heet het wiskundige 'gereedschap' dat Hamilton bedacht en waarmee Grigori Perelman het Poincarévermoeden bewees?

Woordenlijst

Nederlands	*Engels*
enkelvoudig samenhangend	simply connected
gesloten	closed
homeomorf	homeomorphic
homeomorfisme	homeomorphism
homologie	homology
homotopie	homotopy
oppervlak	surface
rand	boundary
sfeer	sphere
variëteit	manifold
vermeetkundigingsvermoeden	geometrization conjecture

Bronnen

Boeken:

- J. R. Week, *The Shape of Space*, ISBN: 0-8247-0709-5.

  Dit goed geschreven wiskundeboek is een elementaire, maar uitputtende introductie in de topologie van twee- en driedimensionale ruimtes en mogelijke implicaties voor de vorm van het universum. Het boek bevat veel opgaven. Mochten er leerlingen zijn die in het kader van een (profiel)werkstuk verder willen gaan met de stof van TopWis Poincaré dan is The Shape of Space een logisch vervolg.

- D. O'Shae, *The Poincare Conjecture: in search of the shape of the universe*, ISBN: 0-8027-1654-7.

  Dit boek bespreekt de geschiedenis van het Poincaré vermoeden en gaat daarbij terug tot de wiskunde van de oude Grieken. De belangrijke wiskundige concepten worden met een minimum aan technische taal en aan de hand van heldere voorbeelden zeer duidelijk uitgelegd.

- Hatcher, *Algebraic Topology*, te downloaden op (pas op: technisch!!) :

  http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATchapters.html.

  Dit is een wiskunde tekst over algebraïsche topologie voor **gevorderde wiskundestudenten**. Het stukje '*The idea of the fundamental group*' in de inleiding hoofdstuk 1 geeft een idee over paden in de ruimte en is wel te lezen.

Filmmateriaal:

- Documentaire: *The spell of the Poincaré conjecture*, uitgezonden in de VS door American Public Telivision. Meer informatie op internet te vinden. (Moeilijk te krijgen.)

  Deze documentaire van een uur geeft een goed beeld van de historie van het Poincaré vermoeden en daarbij behorende hoofdrolspelers.

- Item in Australisch wetenschapsprogramma Catalyst: *The Poincaré conjecture*. Te vinden op youtube: http://www.youtube.com/watch?v=TzMZKiCgEVE.

  In vijfminuten worden de belangrijkste punten van het Poincaré vermoeden helder uiteengezet.

Artikelen:

- Sylvia Nasar and David Gruber, *Manifold destiny: A legendary problem and the battle over who solved it*, The New Yorker. Online op:

  http://www.newyorker.com/archive/2006/08/28/060828fa_fact2#ixzz0gvCJOGZr.

- John Milnor, *Towards the Poincaré Conjecture and the Classification of 3-manifolds*, te downloaden op (pas op: heel technisch!!):

  http://www.ams.org/notices/200310/fea-milnor.pdf

Websites:

- www.geometrygames.org – website van J. R. Weeks met verschillende spellen en simulaties met betrekking tot meetkunde en topologie.
- http://nl.wikipedia.org/wiki/Vermoeden_van_Poincaré - Nederlandse Wikipedia-pagina over het Poincaré vermoeden.
- http://en.wikipedia.org/wiki/Simply_connected_space - Engelse Wikipedia-pagina over enkelvoudige samenhang.
- http://www.britannica.com/EBchecked/topic/599686/topology/258070/Basic-concepts-of-general-topology - Enceclopedia Britannica pagina over topologie.
- http://members.home.nl/pascal.wissink/niet_euclidische_meetkunde/web/niet%20euclidische%20meetkunde_web.htm#I – Een scriptie van 5 vwo'ers over niet-Euclidische meetkunde.