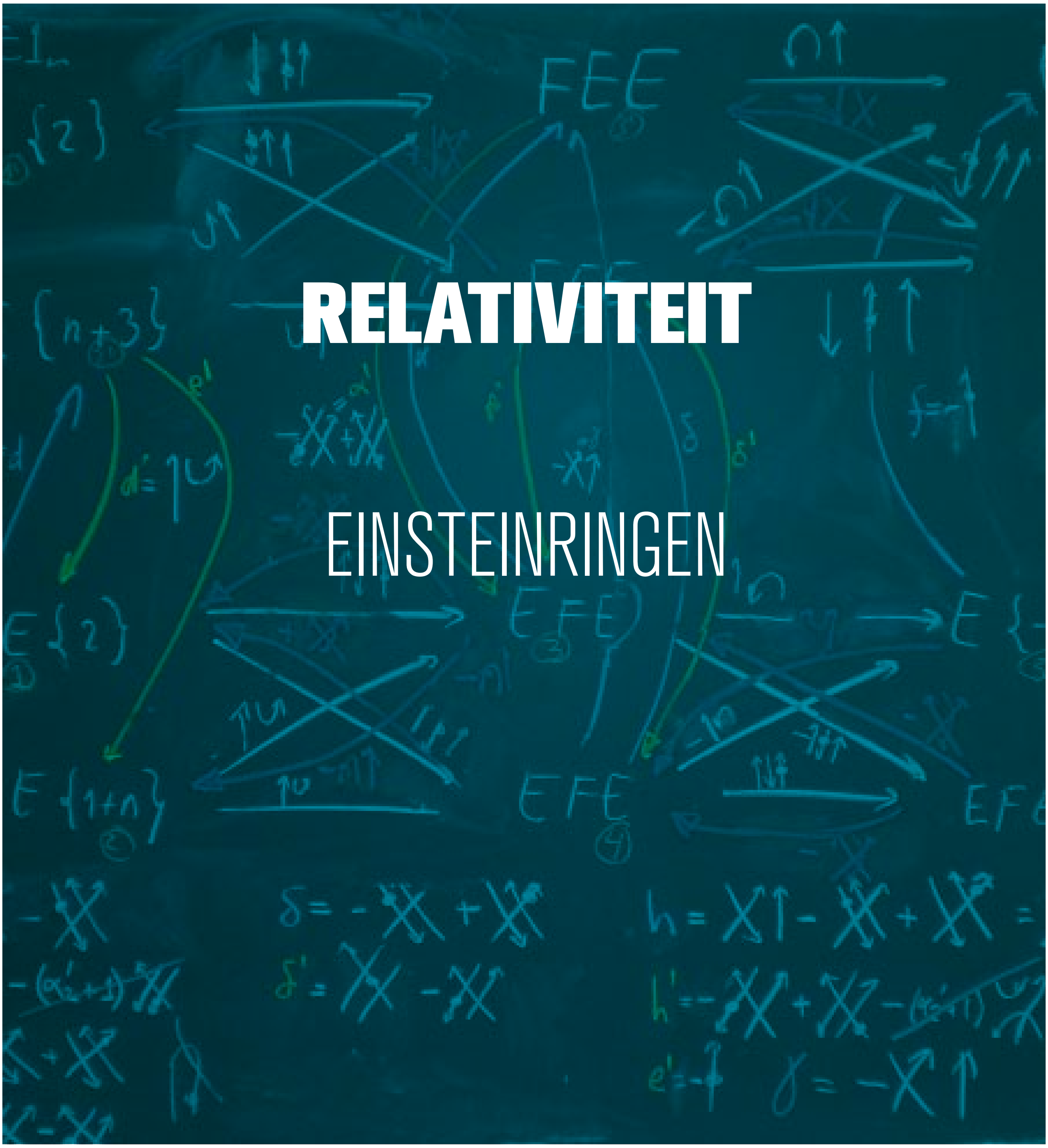


# RELATIVITEIT

## EINSTEINRINGEN

**Naam:**

**Klas:**

**Datum:**

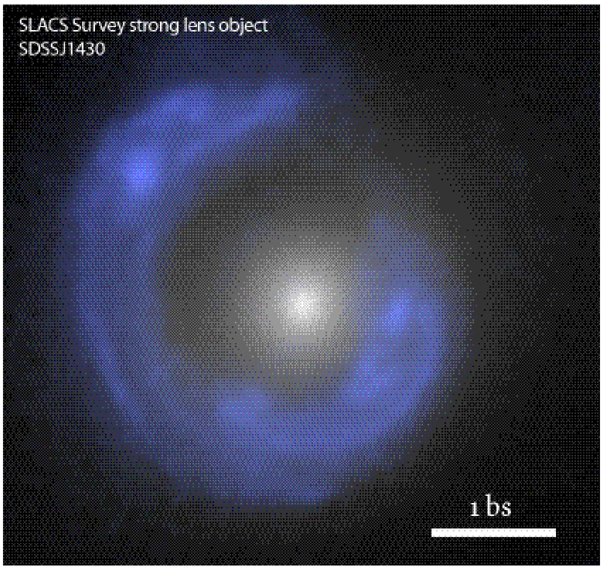
De Praktijk

# EINSTEINRINGEN

## ZWAARTEKRACHTSLENZEN

**Je hebt de afgelopen weken geleerd over de relativiteitstheorie van Albert Einstein, en wat voor gevolgen die heeft als je wil gaan reizen met hoge snelheden. Relativiteitstheorie speelt echter niet alleen op de relatief kleine schaal van ons eigen melkwegstelsel een rol, maar ook op een kosmische schaal. Een van de gevolgen van de relativiteitstheorie is het ontstaan van zogenaamde Einsteinringen.**

Hieronder zie je een afbeelding van een Einsteinring van het spiraalvormige sterrenstelsel SDSSJ1430.

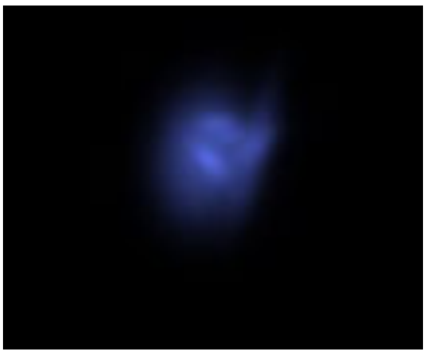



**Figuur 1:** Het sterrenstelsel SDSSJ1430 (wit) en een erachter gelegen stelsel (blauw).

1. Discussieer met de hele klas over wat je denkt dat er op de afbeelding te zien is. Heb je dit soort vormen wel eens ergens gezien? Wat is er gebeurd met het blauwe stelsel dat achter het witte stelsel ligt?

2.

A. Kijk door de voet van een wijnglas naar figuur 2 om het stelsel er vergelijkbaar met het stelsel in figuur 1 uit te laten zien. Zet hiertoe eerst het wijnglas op figuur 2 en kijk langs de steel door de voet terwijl je het glas rustig omhoog beweegt.



**Figuur 2:** Het ongelensde stelsel.

**B.** Wat is er in het geval van figuur 1 aan de hand? Welk object neemt hier de plaats van het wijnglas in?

.....................................................................

.....................................................................

Voordat we de lenswerking van sterrenstelsels in detail gaan bekijken, bestuderen we in onderstaande opdrachten eerst de bekende werking van gewone lenzen.

**C.** Zoek op in Binas hoe de brekingswet van Snellius luidt, en leg uit wat de verschillende variabelen in de formule betekenen. Illustreer je uitleg met een tekening.

.....................................................................

.....................................................................

De brekingsindices van glas en lucht verschillen van elkaar. Zoals de wet van Snellius zegt, wordt het licht bij een overgang van glas naar lucht of andersom dus afgebogen. Een andere manier om de grootte van de breking te berekenen is met de wet van Huygens:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} \tag{1}$$

waarbij $i$ de hoek van inval is, $r$ de hoek van uitval, net als in de wet van Snellius, maar $v_1$ en $v_2$ de snelheden van het licht in medium 1 en 2.

**D.** Beredeneer hoe een snelheidsverschil van het licht binnen twee media voor lichtbreking kan zorgen. Hint: als je er niet uit komt, teken dan wat er met een golffront gebeurt als het het grensvlak raakt en dus van snelheid verandert. Denk aan de hoek tussen de lichtstraal en het glas.

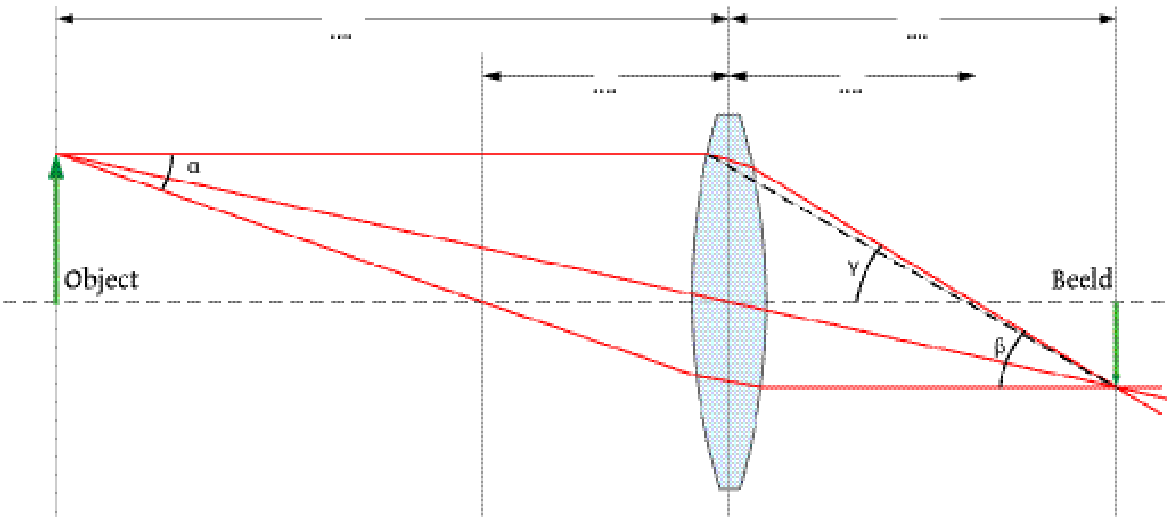
.....................................................................

.....................................................................

**E.** Zoek ook de lenzenformule op in Binas en vul in onderstaande afbeelding in waar de grootheden uit de formule zich in de tekening bevinden.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .




**Figuur 3:** De werking van een lens.

**F.** De meetkunde voor de lenswerking van kosmische objecten is precies zoals die in figuur 3. In het kosmische geval zijn de hoeken $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$ over het algemeen heel klein. Toon met een berekening aan dat de lenzenformule voor zulke kleine hoeken te schrijven is op de volgende manier:

$$\frac{\alpha+\beta}{O+B} = \frac{\gamma}{O} \quad (2)$$

waarbij O de grootte van het object is, en B de grootte van het beeld. Gebruik dat de tangens van een heel kleine hoek, gemeten in radialen, gelijk is aan de hoek zelf.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**G.** In de onderstaande afbeelding beweegt licht van diamant naar lucht. De brekingsindex van diamant is ongeveer 2,4; die van lucht vrijwel gelijk aan 1. Gebruik een geodriehoek om de hoeken nauwkeurig te meten. Laat zien dat de wet van Snellius geldt.

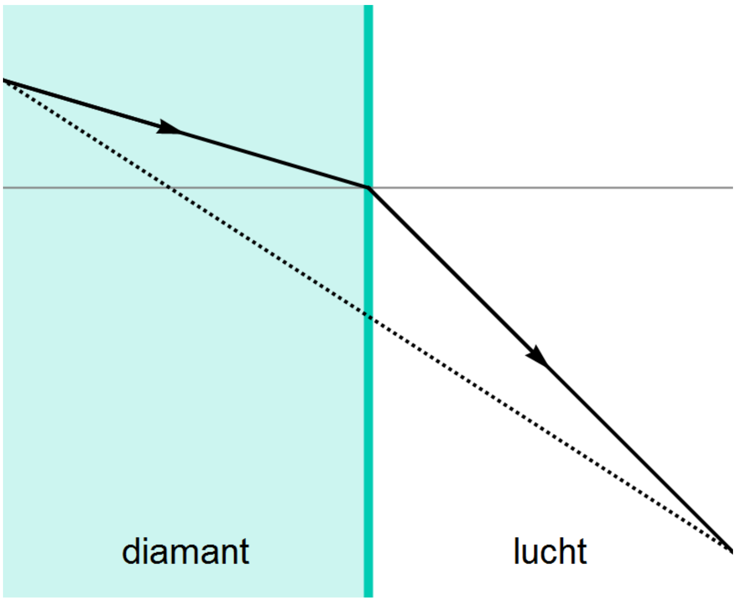
.......................................................................

.......................................................................

**H.** Bereken hoe lang licht onderweg is, en hoe lang licht onderweg zou zijn als het de stippellijn zou volgen. Je mag aannemen dat de lichtsnelheid in lucht vrijwel gelijk is aan die in vacuüm. De lichtsnelheid in diamant kun je dan vinden met behulp van formule (1).

.......................................................................

.......................................................................




Als we weer naar de vorm van het stelsel door de voet van het glas kijken kunnen we het volgende opmerken: de sterkte van de lens in de voet als functie van de afstand tot het midden van de voet van het wijnglas is niet constant. De lenswerking aan de buitenkant is zwakker dan de lenswerking aan de binnenkant, doordat het glas aan de buitenkant minder gebogen is.

**I.** Verwacht je op basis van figuur 1 en het experiment met het wijnglas dat de lenswerking van het sterrenstelsel ook aan de buitenkant zwakker is dan aan de binnenkant? Geef hiervoor een verklaring en gebruik hierin de formule voor gravitatiekracht uit Binas tabel 35 A4.

.......................................................................

.......................................................................

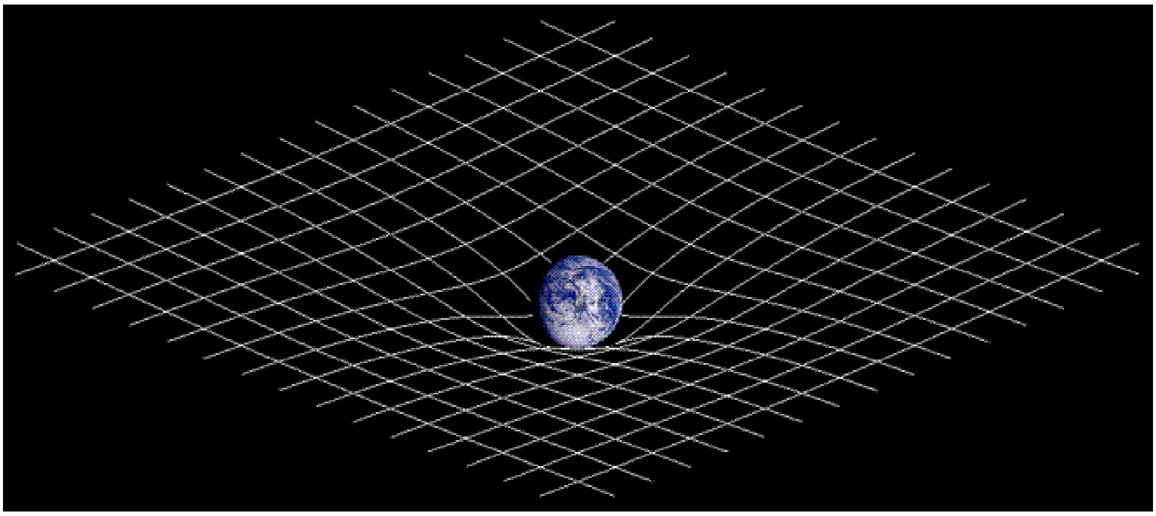
## ALGEMENE RELATIVITEIT

Het plaatje aan het begin van deze module is natuurlijk niet gemaakt door een gigantisch wijnglas in de ruimte. Maar waardoor dan wel? De verklaring ligt in de **algemene relativiteitstheorie** van Albert Einstein. Dit is een uitbereiding op de **speciale relativiteitstheorie** waar je de afgelopen weken over geleerd hebt. Ongeveer tien jaar na zijn eerste publicatie over de verschijnselen bij hoge snelheid heeft Einstein zijn licht laten schijnen over de werking van de zwaartekracht.

Ook de algemene relativiteitstheorie is gebouwd op relatief eenvoudige principes, alleen zijn de wiskundige methodes die gebruikt worden iets ingewikkelder. Het basisprincipe van de algemene relativiteitstheorie heet ook wel het **equivalentieprincipe** en kun je als volgt verwoorden:

*Het is niet mogelijk om zonder informatie van buitenaf onderscheid te maken tussen een systeem dat versneld wordt en een systeem dat zich in een zwaartekrachtsveld bevindt.*

Denk bijvoorbeeld aan een versnellende lift: als die flink omhoog versnelt heb je in de lift het gevoel dat je omlaag gedrukt wordt door een “schijnzwaartekracht”. Einstein liet zien dat dit equivalentieprincipe een belangrijk gevolg heeft. Als je een zwaartekrachtsveld kunt nabootsen door een systeem te versnellen, ondervinden alle voorwerpen in een zwaartekrachtsveld dus dezelfde versnelling. Dit was een verschijnsel dat Galileo Galilei al kende: hij liet twee ballen met een verschillende massa van de toren van Pisa vallen, en merkte op dat beide ballen precies tegelijk de grond bereikten. Met andere woorden: de zwaartekrachtsversnelling hangt niet af van de eigenschappen van het vallende voorwerp, maar alleen van de plaats waar het voorwerp op een bepaald moment is. Zwaartekracht is dus een eigenschap van de ruimtetijd zelf! Einstein ging nog een stap verder, en liet zien dat je de zwaartekracht kunt beschrijven als een *kromming* van de ruimtetijd. Dit kun je je weer beter voorstellen in een benadering waarin minder dan vier ruimtetijddimensies voorkomen. Als we bijvoorbeeld de tijdrichting en één van de ruimterichtingen weglaten, kunnen we de zwaartekracht vergelijken met de kromming van een oppervlak. Dat ziet er in het geval van de aarde als volgt uit:



**Figuur 4:** Gekromde ruimtetijd onder invloed van de zwaartekracht van de aarde.

De massa van de aarde kromt de ruimtetijd om zich heen, en andere voorwerpen die door deze ruimtetijd bewegen gaan dus kromme banen volgen. Het zijn precies deze kromme banen die wij ervaren als zwaartekracht.

**3.** Gebruik het equivalentieprincipe om uit te leggen dat licht ook kan worden afgebogen door de zwaartekracht.

**4.** We gaan nu ruimtetijd modelleren met behulp van een ballon, om te kijken wat er gebeurt met een lichtstraal die langs een zwaar sterrenstelsel reist. Daarvoor moeten de volgende stappen gedaan worden:

**A.** Teken, zonder rekening te houden met gekromde ruimtetijd, een lichtstraal die vanuit het achterste stelsel (hieronder links afgebeeld) naar de aarde rechts reist.

Blaas een ballon op, zorg dat hij zo hard is dat er stukjes van het oppervlak zijn die bijna recht zijn, maar niet zo hard dat het moeilijk is om hem in te deuken. Leg er vervolgens een knoop in. Zet met een stift drie punten in een rechte lijn op het oppervlak van de ballon om bovenstaande situatie schematisch weer te geven.

**B.** Wat moet je met het oppervlak van de ballon doen om er ruimtetijd mee te modelleren? Hint: kijk in de figuur 4 wat de aarde met de ruimtetijd doet. Het (zware) sterrenstelsel doet dit nog veel sterker.

**C.** Teken nu op de niet-vervormde ballon een rechte lichtstraal die van het achterste sterrenstelsel langs het lenzende stelsel gaat. Gaat deze lichtstraal nog steeds overal rechtdoor als je de zwaartekracht van het stelsel in het midden modelleert door de ballon op dat punt in te drukken? Leg uit.

**D.** Druk de ballon weer in op het punt van het zware lenzende stelsel. Teken er vervolgens een lichtstraal op die vanuit het achterste langs het lenzende stelsel reist. Zorg ervoor dat het, terwijl je de ballon ingedrukt houdt, lijkt alsof de lichtstraal rechtdoor gaat. Je kunt dit doen door de viltstift haaks op het oppervlak van de ballon te houden terwijl je aan het tekenen bent. Is dit nog steeds een rechte lijn als je de zwaartekracht "uitzet" door de ballon niet meer in te drukken? Beschrijf wat er gebeurd is.

**E.** Teken op een andere plek op de ballon opnieuw de 3 objecten in een rechte lijn. Druk de ballon weer in en teken een lichtstraal die langs het lenzende stelsel gaat, maar door de buiging van de ruimtetijd toch op de aarde aankomt. Laat de ballon weer uitdeuken en kopieer hieronder het resultaat.

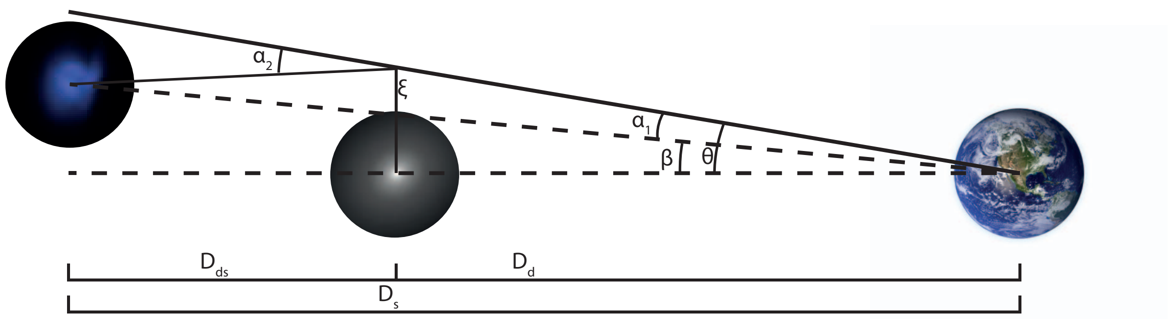
**F.** Denk je dat je antwoord op vraag 2H ook opgaat voor de afbuiging van licht door zwaartekracht? Gebruik in je antwoord het model van de ballon en bedenk je wat er gebeurt met de afgelegde afstand als de ruimtetijd wordt uitgerekt.

## WAT KUN JE ERMEE?

Leon Koopmans is als kosmoloog werkzaam aan de Rijksuniversiteit Groningen. Met zijn medewerkers gebruikt hij de lenswerking van de zwaartekracht onder andere om van ver gelegen heldere stelsels te bepalen hoe zwaar ze zijn. Bekijk het filmpje over het onderzoek van Leon Koopmans dat je kunt vinden op *http://www.quantumuniverse.nl/filmpjes*.

Je gaat nu voor het sterrenstelsel in de voorgrond van figuur 1 zelf bepalen hoe zwaar het is, op dezelfde manier als Leon Koopmans dat doet.

We beginnen met de onderstaande situatie, waarbij het beeld dat we van het achterste sterrenstelsel zien niet (veel) gewijzigd wordt, maar alleen op een andere plek wordt weergegeven. Vanaf de aarde zien we het achterliggende stelsel aan het einde van de bovenste zwarte lijn, maar in werkelijkheid ligt het achterliggende stelsel in de richting van de bovenste stippellijn. Het verschil tussen de hoek waaronder we het sterrenstelsel zien en de hoek waarop het daadwerkelijk staat, noemen we $\alpha_1$.




Met de algemene relativiteitstheorie van Einstein kan aangetoond worden dat voor de hoek $\alpha_2$ de volgende formule geldt:

$$\alpha_2 = \frac{4GM}{c^2 \xi} \tag{3}$$

Hierin is $G$ de zwaartekrachtsconstante, $M$ de massa van het lenzende stelsel, $c$ de lichtsnelheid en $\xi$ (de Griekse letter xi) de zogenaamde *impactparameter*, de afstand waarop het licht aan het lenzende stelsel voorbij gaat. Daarnaast kan met wat meetkunde uit de afbeelding afgeleid worden dat voor heel kleine hoeken, waar we in dit geval mee te maken hebben, geldt dat:

$$\beta D_s + \alpha_2 D_{ds} = \theta D_s \tag{4}$$

Als we de bovenstaande afbeeldingen bekijken, valt op dat de meetkunde ervan sterk overeenkomt met die van een gewone lens, zoals afgebeeld in de figuur bij opdracht 2E. Hetzelfde geldt voor de bijbehorende formules: formule (2) en formule (4) geven allebei een relatie tussen de verschillende hoeken, en met wat meekunde kan worden aangetoond dat de twee formules equivalent zijn. Met andere woorden, formule (4) is niets anders dan de lenzenformule voor zwaartekrachtslenzen.

**5.**

**A.** Toon aan met behulp van vergelijking (3) en (4) dat

$$\beta = \theta - \frac{D_{ds}}{D_s} \cdot \frac{4GM}{c^2 \xi} \qquad (5)$$

**B.** Met wat meetkunde kan verder aangetoond worden dat de impactparameter wordt gegeven door

$$\xi = D_d \cdot \theta \qquad (6)$$

Vul dit in in formule (5) om een uitdrukking voor β te vinden die alleen van de hoek θ, maar niet van de andere hoeken afhangt.

We zetten nu het achterste stelsel weer recht achter het lenzende stelsel, zoals hieronder is weergegeven.

**C.** Welke van de hoeken $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta$ en $\theta$ is nu gelijk geworden aan 0? Leg uit.

**D.** Teken in onderstaande weergave van het systeem de nog overgebleven lijnen en hoeken uit figuur 5. Zorg dat duidelijk is welk pad het licht aflegt. Let op: de hoek die je bij opdracht 5C hebt genoemd hoef je dus niet meer te tekenen.

**E.** Stel in vergelijking (5) uit opdracht 5A $\beta$ gelijk aan 0 en vind zo een uitdrukking voor $\theta^2$

.............................................................................

.............................................................................

.............................................................................

De vergelijking die je in opdracht 5E hebt gevonden is een uitdrukking voor de **Einsteinstraal** $\theta_E$ . De Einsteinstraal is de afstand aan de hemel van het centrum van het lenzende stelsel naar het aan de hemel verst gelegen gedeelte van het achterste stelsel. Als je deze afstand meet in boogseconden (zie hieronder) en de vergelijking verder uitwerkt, vind je de volgende uitdrukking:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{M}{10^6 M_{zon}}} \cdot \sqrt{\frac{10\ kpc}{D}} \quad boogseconden \tag{7}$$

waarbij $M$ de massa is van het lenzende stelsel, $M_{zon}$ de massa van de zon, die als referentiemassa in de formule is opgenomen om de andere getallen niet te groot te maken, en $D$ de gereduceerde afstand. Die gereduceerde afstand $D$ wordt gemeten in kiloparsec (kpc) en is gedefinieerd door:

$$D = \frac{D_d D_s}{D_{ds}} \tag{8}$$

**6.**

**A.** Zoek op in Binas hoeveel meter een kpc is en hoeveel kg een zonsmassa is.

.................................................................................

.................................................................................

De boogseconde is een eenheid waarmee astronomen hoeken (en dus formaten) aan de hemel aangeven. De hemel is onderverdeeld in 360 graden, die allen zijn onderverdeeld in 60 boogminuten, die weer zijn onderverdeeld in 60 boogseconden. De maan en de zon zijn de grootste objecten aan de hemel met een grootte van 30 boogminuten, oftewel een halve graad.

**B.** Bereken hoeveel graden een boogseconde (bs) is. Geef je antwoord als een breuk.

.................................................................................

.................................................................................

.................................................................................

## DE MASSA VAN SDSSJ1430

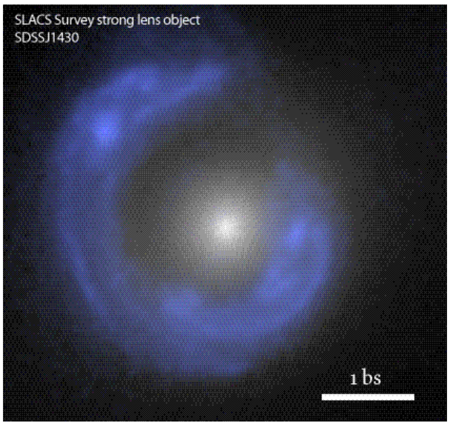
Je hebt nu alle instrumenten om de massa van het stelsel in de voorgrond te bepalen. Het enige dat nog mist zijn enkele specifieke getallen. Uit andere waarnemingen en berekeningen zijn de volgende getallen gekomen:

$D_d = 1\ Gpc$

$D_{ds} = 1\ Gpc$

$D_s = 1{,}7\ Gpc$

Daarnaast kun je uit onderstaande afbeelding de grootte van SDSSJ1430 aan de hemel bepalen.



7. Bereken met behulp van de beschikbare gegevens de massa van het bolvormige stelsel in de voorgrond in zonsmassa's. Bereken ook de massa in kilogram.

................................................................................

................................................................................

................................................................................

................................................................................

................................................................................

................................................................................