

**Naam:**

**Klas:**

**Datum:**

## KEPLER 22B

### VERDER EN VERDER WEG

Zoals we hebben gezien in de vorige module, heeft het reizen met hoge snelheid vreemde gevolgen voor het verloop van de tijd. Door tijdsdilatatie loopt een klok die met een raket meereist voor een stilstaande waarnemer op aarde langzamer dan voor een meebewegende waarnemer in de raket.

De hoeveelheid tijdsdilatatie die tussen twee verschillende waarnemers plaatsvindt, hangt af van de Lorentzfactor  $\gamma$  :

$$\Delta t_a = \gamma \cdot \Delta t_r \tag{1}$$

Hierbij is  $\Delta t_r$  de verstreken tijd volgens de waarnemer in de raket (zoals in de vorige module), terwijl  $\Delta t_a$  de waargenomen tijd is volgens de stilstaande waarnemer op aarde. De Lorentz-factor hangt alleen maar af van het snelheidsverschil  $v$  tussen de twee waarnemers:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

Deze twee relaties dwingen je om op een andere manier over ruimte en tijd na te denken. Ruimte en tijd zijn niet los van elkaar te beschouwen, en daarom kunnen we alleen maar over **ruimtetijd** spreken.

Bekijk het filmpje met de titel “Lengtecontractie” op <http://www.quantumuniverse.nl/filmpjes>.

Stel je voor dat het inmiddels nog verder in de toekomst is dan in de vorige module: het jaar is 2163. Dankzij de uitvindingen in de late 21ste eeuw is er een levendige interstellaire economie opgebloeid. Er blijken allerlei andere levensvormen dan de mens te zijn, die op tientallen, honderden en duizenden lichtjaren van de aarde wonen. Jij gaat op een interstellaire handelsmissie naar de planeet Kepler 22b, met een ruimteschip dat met maximaal 0,99 c kan reizen.

**1.** Discussieer ongeveer 5 minuten met elkaar over het realisme van deze situatie. Beantwoord met behulp van Binas samen de volgende vragen:

**A.** Wat zijn mogelijke problemen als je een snelheid van 0,99 c wil bereiken?

.....

.....

**B.** De afstand naar Kepler 22b is 620 lichtjaar. Bereken of je binnen een mensenleven heen en weer kan.

.....

.....

**LENGTECONTRACTIE**

Niet alleen de motoren zijn beter geworden in de toekomst, ook de sensoren die worden gebruikt om te navigeren kunnen meer opvangen dan alleen licht. We kijken naar een sensor die muonen kan detecteren, en ook hun snelheid kan meten. Muonen zijn elementaire deeltjes die een heel korte halfwaardetijd hebben. Deze deeltjes vervallen als ze gemaakt worden in een laboratorium namelijk gemiddeld na  $2,2 \cdot 10^{-6}$  seconde tot een elektron en een neutrino. Ze ontstaan onder meer op een hoogte van ongeveer 15 km bovenin de atmosfeer, als kosmische protonen op de atomen uit de atmosfeer (onderin de stratosfeer) botsen. De muonen die dan vrijkomen hebben een snelheid van ongeveer 0,999 c. Om de nieuwe sensoren van je ruimteschip te testen gaan we kijken of je die muonen kan detecteren op aarde.

**2**

**A.** Bereken, zonder rekening te houden met relativistische effecten, hoe ver het muon kan reizen voor het vervalt.

.....  
.....  
.....

**B.** Verwacht je dat je muonen kunt detecteren op het aardoppervlak?

.....  
.....  
.....

De afstand die het muon kan reizen hangt af van de tijd die het heeft tot het vervalt. Als het muon beweegt zal die levensduur veranderen door tijdsdilatie.

**C.** Beredeneer (zonder berekening) wat de invloed van de relativiteitstheorie is op de afstand die je bij opdracht 2A hebt uitgerekend.

.....  
.....

**D.** Gebruik formule (1) om te berekenen wat in jouw referentiestelsel de gemiddelde levensduur van een muon met een snelheid van 0,999 c is.

.....  
.....

E. Verwacht je, als je de tijdsdilatatie meerekent, dat je detector een gemiddeld muon wel of niet zal opvangen? Leg uit.

.....  
 .....

In het referentiestelsel van het muon zelf vervalt het deeltje zoals we gezien hebben veel sneller dan in jouw referentiestelsel. Het lijkt er dus op dat het muon in het eigen referentiestelsel de detector niet zal bereiken, maar in jouw referentiestelsel wel. Dat is een vreemde tegenspraak: in verschillende referentiestelsels zou de vraag of iets wel of niet gebeurt natuurlijk geen verschillend antwoord moeten hebben.

F. Bespreek met degene die naast je zit hoe deze schijnbare tegenspraak opgelost kan worden. Als je er zelf niet uit komt geeft de titel van deze paragraaf een hint voor de oplossing. Beschrijf jullie ideeën.

.....  
 .....

De oplossing voor de tegenspraak ligt erin dat bewegende objecten korter zijn in de richting van hun beweging. We noemen deze verkorting ook wel **lengtecontractie** of **Lorentzcontractie**. Het muon vervalt in zijn eigen referentiestelsel binnen heel korte tijd, maar doordat de dikte van de atmosfeer gecontraheerd is, is deze tijd lang genoeg om de hele atmosfeer te doorkruisen.

G. Zoals de meeste grootheden binnen de relativiteitstheorie hangt ook de lengtecontractie af van de Lorentzfactor  $\gamma$ . Bepaal aan de hand van wat je weet over lengtecontractie of formule (3) of (4) de juiste uitdrukking is voor de dikte van de dampkring,  $l_m$ , zoals gezien vanuit het bewegende muon. In de formulie is  $\gamma$  weer de Lorentzfactor (2) en  $l_a$  de dikte van de dampkring zoals een stilstaande waarnemer op aarde die meet. Motiveer je antwoord.

$$l_m = \frac{l_a}{\gamma} \tag{3}$$

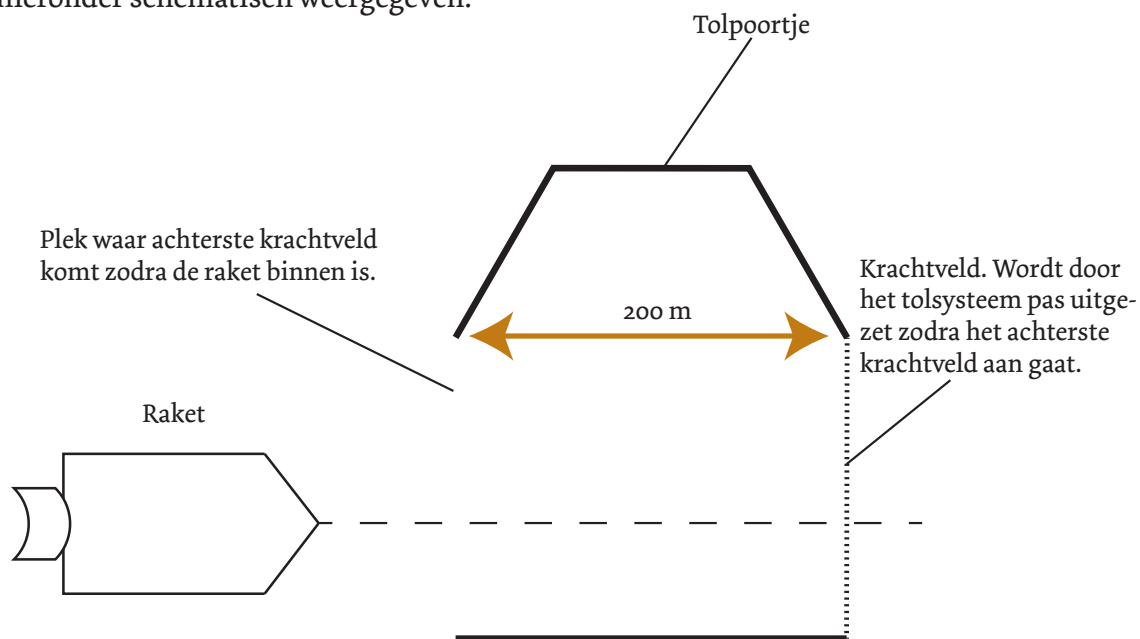
$$l_m = l_a \cdot \gamma \tag{4}$$

.....  
 .....

- H. Zoek op in Binas welke formule de juiste is. Let op: in Binas worden de waargenomen lengtes anders aangeduid. De lengte in het referentiestelsel van de aarde  $l_a$  wordt aangeduid met  $l_e$  en de lengte zoals waargenomen door het bewegende muon  $l_m$  wordt aangeduid met  $l_b$ .

**INTERSTELLAIR TOLPOORTJE**

Je muondetectoren blijken het te doen en je vertrekt naar Kepler 22b. Om interstellair te kunnen reizen is het belangrijk dat er geen rotsblokken of stofdeeltjes op je weg komen, want dat kan je raket ernstig beschadigen als je met hoge snelheid reist. Om te zorgen dat dit niet gebeurt, reis je over interstellaire tolwegen. Dat zijn stukken ruimte die vrij zijn van gevaarlijke objecten. Je moet hier natuurlijk wel voor betalen, en daarom is er op de interstellaire tolwegen om de 20 lichtjaar een tolpoortje gebouwd. Je raket heeft binnen het eigen referentiestelsel een lengte  $l_r$  van 300 meter, maar kan pas doorvliegen als het helemaal binnen het 200 meter lange tolpoortje is en de tol van je betaalchip is afgeschreven. Binnen het tolpoortje geldt een snelheidslimiet van  $0,8 c$ , waar jij je netjes aan houdt. De situatie is hieronder schematisch weergegeven.



**Figuur 1:** Schematische weergave van de raket en het tolpoortje in het referentiestelsel van het tolpoortje

3.  
 A. Beschrijf wat je denkt dat er gaat gebeuren gezien door een waarnemer bij het tolpoortje. Betrek het begrip lengtecontractie in je beschrijving.

.....

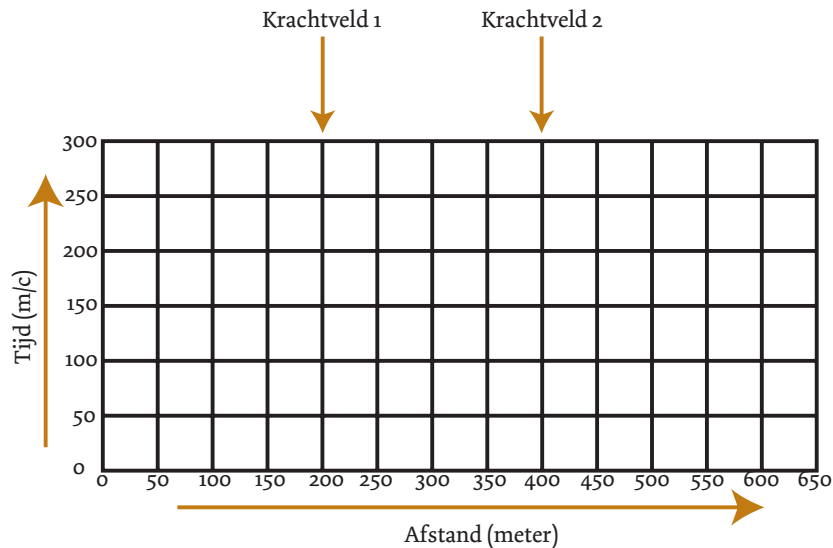
.....

- B.** Bereken met behulp van de formule uit Binas de geobserveerde lengte van de raket ( $l_t$ ) voor een waarnemer in het referentiestelsel van het tolpoortje. Bedenk eerst goed waar de verschillende variabelen in de formule staan.

.....

.....

- C.** Schets de situatie in het onderstaand ruimtetijd diagram volgens een waarnemer in het referentiestelsel van het tolpoortje. Teken ook de aanwezigheid van de krachtvelden. Op  $t=0$  bevindt de achterkant van de raket zich in de oorsprong. In het diagram meten we de tijd in een eenheid van  $1/300.000.000$ ste seconde - dat wil zeggen: de tijd die het licht erover doet om 1 meter af te leggen.



- D.** Beredeneer of je zonder schade door het tolpoortje heen komt.

.....

.....

.....

Een belangrijk ingrediënt van de relativiteitstheorie is dat natuurwetten niet van een referentiestelsel kunnen afhangen (de eerste aanname in de vorige module). We gaan daarom nu kijken wat er gebeurt als je de situatie bekijkt vanuit het referentiestelsel van de raket.

- E.** Beschrijf nogmaals wat je denkt dat er gaat gebeuren. Bekijk de situatie alleen nu vanuit de raket.

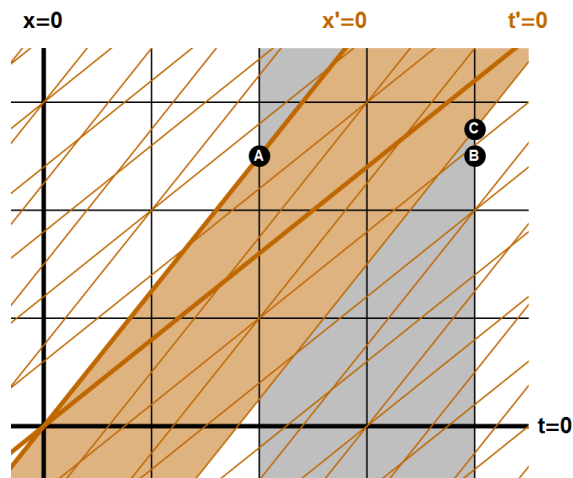
.....

.....

- F. Bereken nogmaals of de raket in jouw referentiestelsel in zijn geheel in het tolpoortje past. Bereken hiertoe eerst de lengte van het poortje in het referentiestelsel van de raket. Hint: de onderlinge snelheid is nog hetzelfde, alleen zijn de twee lengtes in de formule omgedraaid.

.....  
.....

- G. Er lijkt dus weer sprake van een schijnbare tegenstelling of paradox. Deze paradox wordt opgelost door het feit, zoals we in de laatste opgave van de vorige module zagen, dat verschillende waarnemers de ruimtetijd op verschillende manieren opdelen in ruimte en tijd. Vergelijk onderstaande afbeelding met je eigen weergave van de situatie uit opdracht 3C en leg aan de hand hiervan uit waarom je ook vanuit het perspectief van de reiziger in de raket niet in botsing komt met de krachtvelden in het tolpoortje. Het bruine verdraaide assenstelsel vertegenwoordigt de ruimtetijd zoals gezien door de raket, en het grijze, rechte assenstelsel vertegenwoordigt de ruimtetijd zoals gezien door een waarnemer bij het tolpoortje. Bedenk voordat je aan je uitleg begint eerst wat gebeurtenissen A, B en C in deze afbeelding betekenen en in welke volgorde ze voor welke waarnemer plaatsvinden.



.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**GELIJKTIJDIGHEID**

Bekijk voor het maken van de volgende opdracht het filmpje met de titel “Einstein and The Special Theory of Relativity” over de totstandkoming en gevolgen van de relativiteitstheorie op <http://www.quantumuniverse.nl/filmpjes>.

De oplossing van de paradox uit de vorige opgave wordt gedeeltelijk beantwoord door dit filmpje van Minute Physics. De oplossing heeft te maken met gelijktijdigheid binnen de relativiteitstheorie. Voor de volgende opgave gaan we gebruik maken van dit applet: <http://www.quantumuniverse.nl/minkowski-app>.

4.

A. Open het applet en stel de snelheid in op die van je raket. Probeer van alle knoppen en vakjes te ontdekken wat je ermee kunt instellen. De eenheid langs de verticale as is de seconde. Bepaal welke eenheid er langs de horizontale as gebruikt wordt. Leg uit.

.....  
.....  
.....

B. Bereken welke factor je moet gebruiken om de eenheid op de horizontale as om te rekenen naar meter.

.....  
.....  
.....

C. In dit applet kun je twee events instellen, event A en B, met een onderlinge scheiding  $t$  in tijd en  $d$  in ruimte. Dit wordt weergegeven voor het referentiestelsel van het tolpoortje en van de raket. De waarden van  $t'$  en  $d'$  zijn die zoals geobserveerd door de raket. In ons geval is event A het passeren van de ingang en dus het inschakelen van het achterste krachtveld, en event B het voor een waarnemer in het tolpoortje gelijktijdig uitschakelen van het voorste krachtveld. Zullen deze twee events ook in het referentiestelsel van de raket gelijktijdig plaatsvinden? Motiveer je antwoord.

.....  
.....  
.....



Zoals we bij opgave 4A en 4B gezien hebben, is de eenheid langs de horizontale as niet erg geschikt om afstanden in honderden meters uit te zetten. We lossen dit op door aan te nemen dat de grafiek een andere schaal heeft: we nemen nu aan dat de afstand  $d$  in honderden meters is, en dat de eenheid langs de  $t$ -as de hoeveelheid tijd is die het licht nodig heeft om honderd meter af te leggen. Alle resultaten uit het applet kloppen dan nog; alleen de “playfuncties” spelen nu natuurlijk een fors vertraagde versie van de werkelijkheid af.

**D.** Vul de juiste gegevens voor event B in bij de  $t$  en  $d$ . Vul ook de juiste waarde van de relatieve snelheid (*relative velocity*) in. Gebruik de *calculate*-knop om uit te rekenen wat  $d'$  en  $t'$  zijn. Komt dit overeen met je verwachtingen uit opdracht 3G?

.....

.....

**E.** Gebeurt het aanzetten van het ene en het uitzetten van het andere krachtveld in het referentiestelsel van de raket tegelijk? Leg uit.

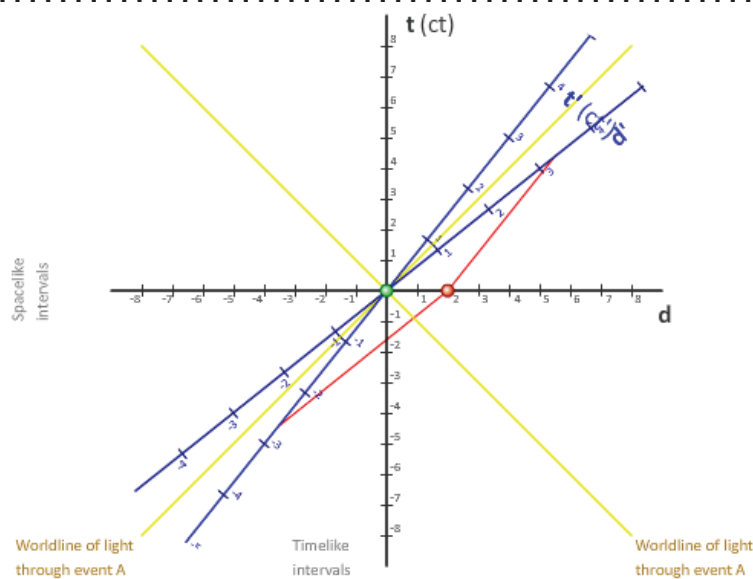
.....

.....

**F.** Als het goed is, heb je het onderstaande plaatje op je beeldscherm gekregen. Teken hierin de reis van de raket. Denk eraan dat in deze weergave de achterkant van de raket op  $t=0$  het tolpoortje binnengaat.

.....

.....



G. Vat in je eigen woorden samen wat de oplossing van de paradox is.

.....

.....

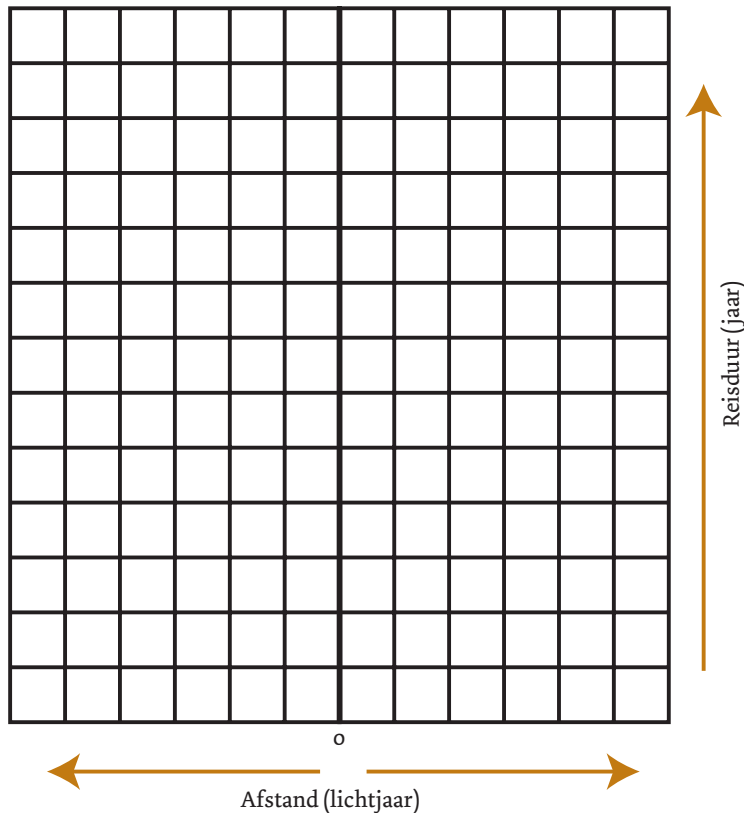
**DE TERUGREIS**

Na betaling van de tol bij het tolpoortje kun je je reis vervolgen. Je komt aan en na een korte maar succesvolle handelsmissie keer je huiswaarts.

- 5.
- A. Teken in het onderstaande assenstelsel een ruimtetijddiagram van de heen- en terugreis naar Kepler 22b. Ga ervan uit dat je meteen de maximumsnelheid bereikt. De onderstaande grafiek is getekend vanuit het referentiekader van de aarde: de aarde zelf staat dus stil en bevindt zich op ruimtecoördinaat  $x=0$  (de dikgedrukte lijn). Reken eerst uit hoe lang de reis duurt om de goede getallen op de assen te kunnen zetten.

.....

.....



**B.** Reken uit hoe ver de hele reis was (in lichtjaren) in het referentiestelsel van de mensen op aarde en in het referentiestelsel van het ruimteschip.

.....  
.....

Om contact te houden met het thuisfront, stuur je iedere 10 jaar (in je eigen referentiestelsel) een bericht met gerichte radiogolven.

**C.** Hoeveel tijd zit er tussen het versturen van twee opeenvolgende berichten in het referentiestelsel van de aarde?

.....  
.....

**D.** Teken de reis van de berichten die je op de heenweg stuurt in een andere kleur in het ruimtetijd diagram.

**E.** Welke afstand (in het aardse referentiekader) legt de raket af tussen het uitzenden van twee berichten?

.....  
.....

**F.** Gebruik je antwoorden bij opdrachten 5D en 5E om uit te rekenen welke schijnbare snelheid je hebt in de waarneming van de mensen op aarde op de heen- en terugweg.

.....  
.....

**G.** Omschrijf hoe het komt dat de mensen op aarde de snelheid anders waarnemen dan deze werkelijk is.

.....  
.....

Op het moment (in het referentiestelsel van de aarde) dat jij aan de terugweg begint, is er nog een ander ruimteschip dat dat ook doet. Dit ruimteschip, we noemen het “ruimteschip B”, is echter op de heenweg recht de andere kant op gereisd. Het vertrekt vanaf de helft van de afstand die jij moet overbruggen. Ruimteschip B komt met  $0,60 c$  recht op de aarde af.

H. Teken ook de reis van ruimteschip B naar de aarde in het tijdruimtediagram.

I. Bereken de onderlinge snelheid tussen de twee raketten volgens een waarnemer op aarde. Neem daarbij aan dat die waarnemer het schijneffect uit vraag 5G kent, en ervoor corrigeert om de echte snelheden te bepalen. Je hoeft met dat effect in je berekening dus geen rekening te houden.

.....  
.....

J. Bereken de onderlinge snelheid zoals waargenomen door jou en door de mensen op de andere raket met behulp van de formule uit Binas.

.....  
.....

**MISSIERAPPORT**

6.

Je missie is afgelopen en je brengt rapport uit over alles wat je waargenomen hebt. Schrijf een rapport van ongeveer 400 woorden, waarin je duidelijk uitlegt wat je allemaal hebt gezien en hoe je dat kunt verklaren. Zorg dat je in ieder geval de volgende zaken behandelt:

- Waarnemers zien bewegende klokken langzamer lopen;
- Waarnemers zien bewegende voorwerpen korter worden in de bewegingsrichting;
- Iedere waarnemer deelt de ruimtetijd op zijn eigen manier op in ruimte en tijd;
- Gelijktijdigheid is een waarnemerafhankelijk begrip;
- Bij het waarnemen van snelheden spelen twee effecten een rol, zoals we in opgave 5J en 5G gezien hebben.