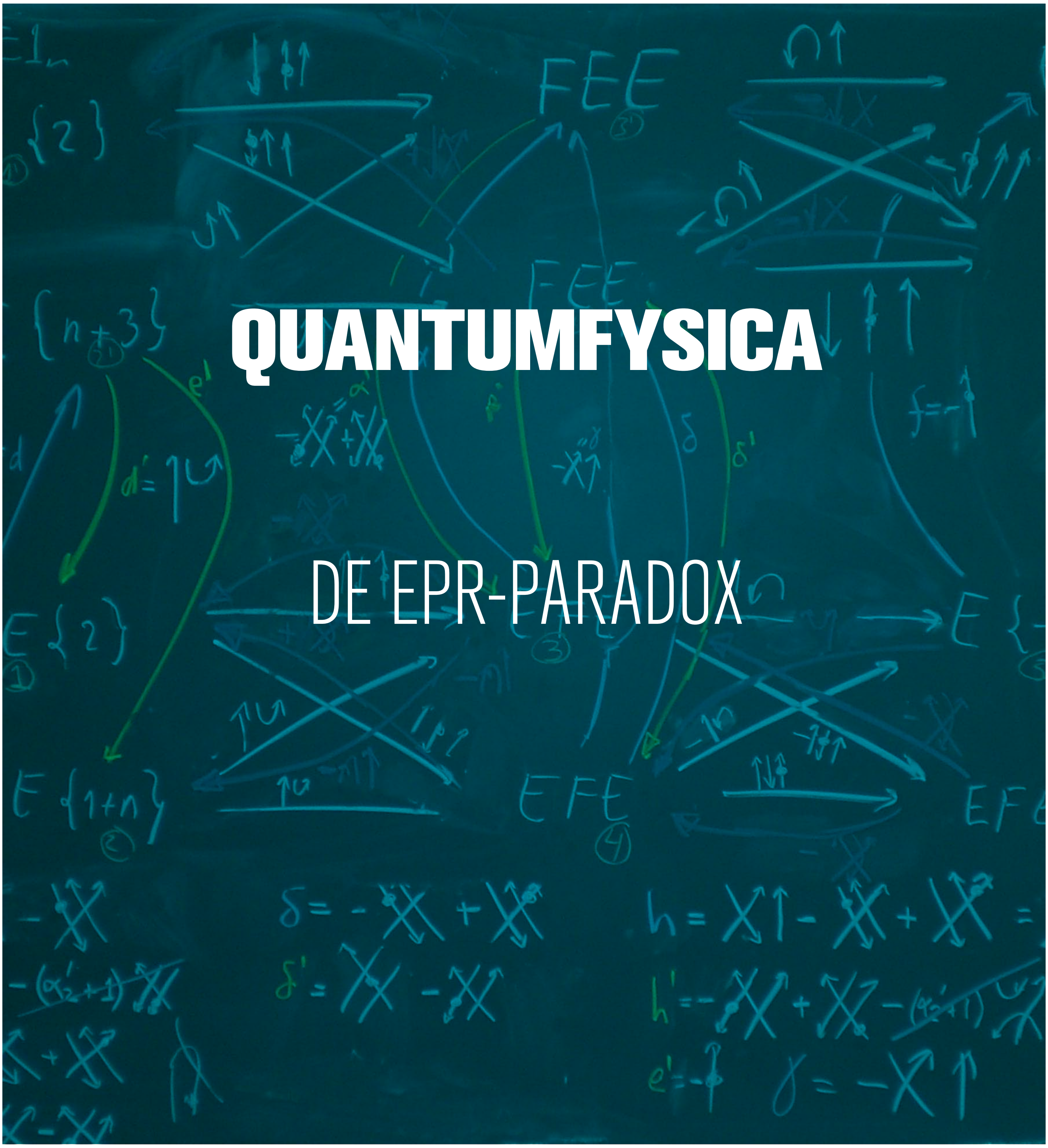


QUANTUMFYSICA

DE EPR-PARADOX

Naam:

Klas:

Datum:

De Praktijk

DE EPR-PARADOX

EEN GEDACHTE-EXPERIMENT

Volgens de wetten van de quantummechanica kunnen bepaalde deeltjes spontaan vervallen. Dit geldt niet alleen voor atoomkernen, maar ook voor heel veel andere deeltjes. Het neutrale pi-meson bijvoorbeeld, aangeduid met π^0, kan vervallen in een elektron en een positron, een elektron met positieve lading. Naast de lading en de energie nemen de ontstane deeltjes ook de spin over van het vervallen deeltje. Spin is een eigenschap van subatomaire deeltjes die te vergelijken is met impulsmoment, of hoeveelheid draaiing. Een π^0-deeltje heeft spin 0.

1.

A. Denk je dat het mogelijk is voor het ontstane elektron en positron om "dezelfde kant op te draaien", dus dezelfde spin te hebben? Leg uit.

....

....

....

....

We gaan een kort experiment doen om uit te vinden of de twee ontstane deeltjes allebei dezelfde kant op kunnen "draaien". Hiervoor heb je twee mensen en twee stoelen met een (even gemakkelijk) draaiende zitting nodig, bij voorkeur zonder wieltjes.

B. De twee personen gaan op de stoelen zitten, die op ongeveer een meter afstand van elkaar staan. Ze houden hierbij hun voeten los. Vervolgens proberen ze, alleen door zich tegen elkaar af te zetten, om dezelfde kant op te draaien op hun stoel. Wat gebeurt er? Kan de ene persoon sneller, minder snel of de andere kant op draaien, vergeleken met de andere?

....

....

....

....

C. Wat verwacht je op grond hiervan voor de spin, die vergelijkbaar is met draaiing, van de twee deeltjes die ontstaan bij het verval van een π^0-deeltje?

....

....

Marcel Vonk is theoretisch fysicus in de groep van Erik Verlinde. Hij houdt zich onder andere bezig met quantummechanica en snaartheorie. Bekijk op de website *http://www.quantumuniverse.nl/filmpjes* het filmpje over zijn werk en over de EPR-paradox.

In de vorige opgave heb je gezien dat om de totale spin gelijk te laten zijn aan 0, de twee ontstane deeltjes uit het π^0-deeltje een tegengestelde spin moeten hebben. Spin is net als veel andere eigenschappen van elementaire deeltjes gequantiseerd. Dat houdt voor elektronen in dat spin alleen een waarde kan aannemen van -1 of +1.

2. Stel, je bent een experimenteel fysicus aan de Universiteit van Amsterdam (UvA) en je doet metingen aan de spintoestand van elektronen. Hiervoor laat je een π^0-deeltje vervallen en vang je de vervalproducten op, zonder direct te meten wat de spintoestand is.

A. Wat kun je zeggen over de spintoestand van beide deeltjes voordat je een meting doet? Motiveer je antwoord.

....

....

....

....

B. Kun je de spintoestand van beide deeltjes als onafhankelijk van elkaar beschouwen? Leg uit.

....

....

....

....

Je stopt het positron in een doos, en neemt het mee naar een ander laboratorium in Utrecht. Het elektron laat je achter op de UvA. In het laboratorium in Utrecht meet je dat het positron een spin van +1 heeft.

C. Wat weet je op dat moment van het elektron dat is achtergebleven in Amsterdam?

....

....

Hoewel bovenstaand experiment in 1935 nog niet uitgevoerd kon worden, konden wetenschappers al wel bedenken hoe het zou verlopen. Einstein was op dat moment al erg bekend vanwege zijn relativiteitstheorie. De speciale relativiteitstheorie zegt onder andere dat niets, dus ook informatie niet, sneller kan reizen dan het licht. Vanuit dat idee publiceerde Einstein samen met zijn collega's Podolsky en Rosen een artikel over een gedachte-experiment, vergelijkbaar met dat met de doos hierboven, in een wetenschappelijk tijdschrift.

3. Beredeneer wat ongeveer de strekking van het artikel moet zijn geweest.

....

....

....

....

....

....

....

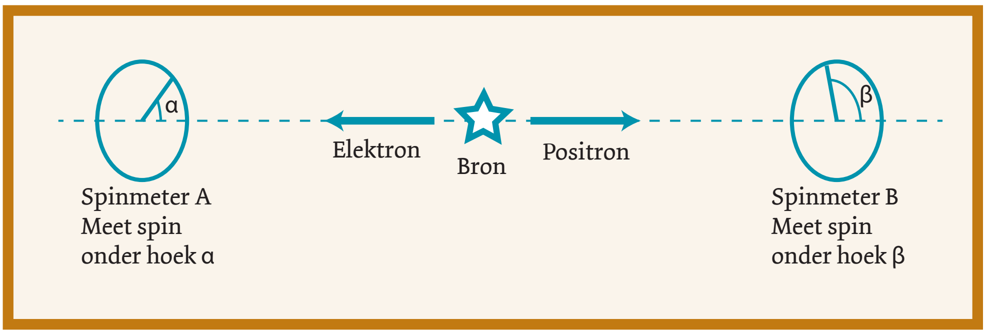
....

VERBORGEN VARIABELEN

In het artikel dat de drie wetenschappers schreven, beschreven ze een paradox die later bekend zou komen te staan als de Einstein-Podolsky-Rosenparadox, of kortweg de **EPR-paradox**. In feite gaat hun vraag niet alleen over de twee verstrengelde deeltjes die ver uit elkaar worden gebracht en gemeten; hun vraag heeft verdergaande gevolgen. Waar de quantummechanica zegt dat de deeltjes in een superpositie van toestanden kunnen zijn, zodat de uitkomst van een meting onzeker is totdat je die meting doet, vermoedden Einstein en zijn collega's dat de deeltjes zich ook vóór de meting al in een toestand met een vastliggende meetuikomst bevinden, maar dat die toestand op de een of ander manier "verborgen" is. Theorieën waarin quantumdeeltjes op elk moment in een verborgen maar uniek bepaalde klassieke toestand zijn, noemen we **verborgen-variabelentheorieën**. Einstein en zijn collega's dachten dus dat de quantummechanica simpelweg een incomplete theorie is, die maar een gedeelte van de werkelijkheid beschrijft. Hierdoor zou de onzekerheid worden gecreëerd die inherent is aan de quantummechanica.

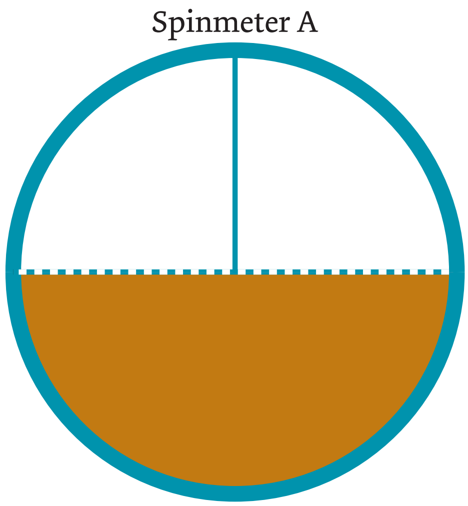
Bekijk voordat je verder leest het filmpje "Can we predict everything?" over quantummechanica op *http://www.quantumuniverse.nl/filmpjes.*

We gaan in de volgende opgave de verborgen-variabelentheorie verder verkennen. Specifiek gaan we bekijken wat voor voorspelling deze theorie doet over de metingen die de onderstaande meetopstelling produceert. Hiervoor gaan we kijken naar de **correlatie** tussen twee metingen van de spin van de twee verstrengelde deeltjes. De spin van een deeltje kun je meten in verschillende richtingen. Omdat spin gequantiseerd is, meet je altijd +1 of -1, ook al meet je de spin van de deeltjes niet in dezelfde richting.



Figuur 1: Meetopstelling spincorrelatieexperiment.

Quantisatie is een heel belangrijk begrip binnen de quantummechanica. Dat je bij het meten van de spin alleen de waarden -1 en +1 kunt vinden, geldt namelijk ook als de spin van het deeltje, zoals volgens de verborgen-variabelentheorie het geval is, eerder een richting had die niet in de richting van de meting ligt. Je dwingt het deeltje dan om zich aan te passen aan de oriëntatie van je meetapparatuur. Je meet volgens de verborgen-variabelentheorie dus de spin in de richting die het meest overeenkomt met de oriëntatie van de meetapparatuur (zie figuur 2). Hoe dit exact gebeurt, is voor dit experiment niet belangrijk.



Figuur 2: Als de spinmeter een deeltje meet met een spinvector in het witte gebied, meet de meter +1; als de spin van het deeltje in het gekleurde gebied ligt, meet de spinmeter -1.

4.

A. Wat is de kans dat je spin omhoog meet, als de “verborgen” toestand van het deeltje 45° verschilt van de meethoek?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

B. Stel dat je de spin van het ene deeltje meet in de tegenovergestelde richting vergeleken met het andere. Bij meter B meet je spintoestand +1. Wat meet je dan bij meter A?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

C. Je draait nu de detectoren ten opzichte van elkaar, zodat ze een onderlinge hoek van 90° hebben. Je meet bij meter A weer +1. Wat kun je zeggen over de meting van meter B? Leg uit.

....

....

....

....

Bij de vorige opdrachten heb je de zogeheten correlatie bekeken. Je kunt deze correlatie uitdrukken in een getal tussen de -1 en +1. Hierbij betekent een correlatie van -1 dat je altijd een tegenovergesteld resultaat bij de twee metingen vindt, terwijl een correlatie van 1 betekent dat je altijd hetzelfde vindt. Bij opdracht 4C heb je als het goed is een correlatie van 0 gevonden, omdat de metingen niet van elkaar afhangen. De correlatie tussen de twee metingen kunnen we in dit geval definiëren als:

$$C = P_{gelijk} - P_{ongelijk} = 2P_{gelijk} - 1. \qquad (1)$$

Hierin is P_{gelijk} de kans dat de twee metingen hetzelfde resultaat geven, en $P_{ongelijk}$ de kans dat het tegenovergestelde gebeurt. De correlatie kan iedere waarde tussen -1 en +1 aannemen. Als de meting in bijvoorbeeld een kwart van de gevallen hetzelfde is en in drie kwart anders, heb je een correlatie van 1/4-3/4=-1/2.

D. Bereken met behulp van formule (1) de correlatie voor de situatie uit opgave 4B.

....

....

....

....

E. Wat is de correlatie tussen de metingen als de detectoren een onderlinge hoek van 45° hebben? En als ze een onderlinge hoek van 135° hebben? Leg uit.

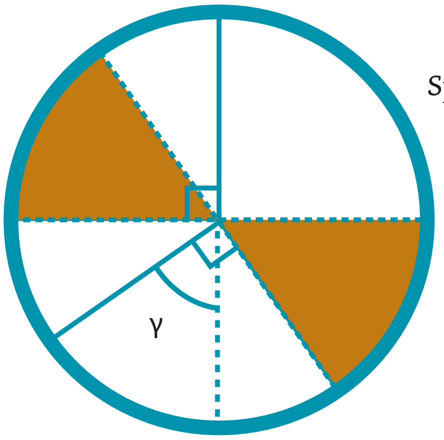
....

....

....

....

In onderstaande afbeelding kijk je recht in de bewegingsrichting van de deeltjes. Spinmeter A en spinmeter B staan dus een heel eind uit elkaar.



Figuur 3: Correlatie tussen spinmeter A en spinmeter B.

Zoals we hebben gezien meten A en B hetzelfde resultaat wanneer de hoeken waaronder ze meten (zie figuur 1) tegenovergesteld zijn, dus als $\beta = \alpha + 180$. In het geval van meer algemene hoeken geven we het verschil tussen β en de "neutrale" hoek $\alpha + 180$ de naam γ:

$$\gamma = |(\alpha + 180) - \beta| \qquad (2)$$

waarbij α en β de hoeken uit de meetopstelling in figuur 1 zijn.

F. Beredeneer wat het gekleurde gebied in figuur 3 voorstelt. Beantwoord daarvoor ook de vraag wat spinmeter A meet bij een spin in het gekleurde gebied. En spinmeter B?

. . . .

. . . .

. . . .

G. Beredeneer met behulp van bovenstaande afbeelding dat de correlatie C tussen de twee metingen volgens de verborgen-variabelentheorie voor $0 \leq \gamma \leq 180$ gegeven wordt door:

$$C = 1 - \frac{\gamma}{90}. \qquad (3)$$

. . . .

. . . .

H. Bereken met behulp van figuur 3 wat formule (3) zou zijn voor $180 \leq \gamma \leq 360$.

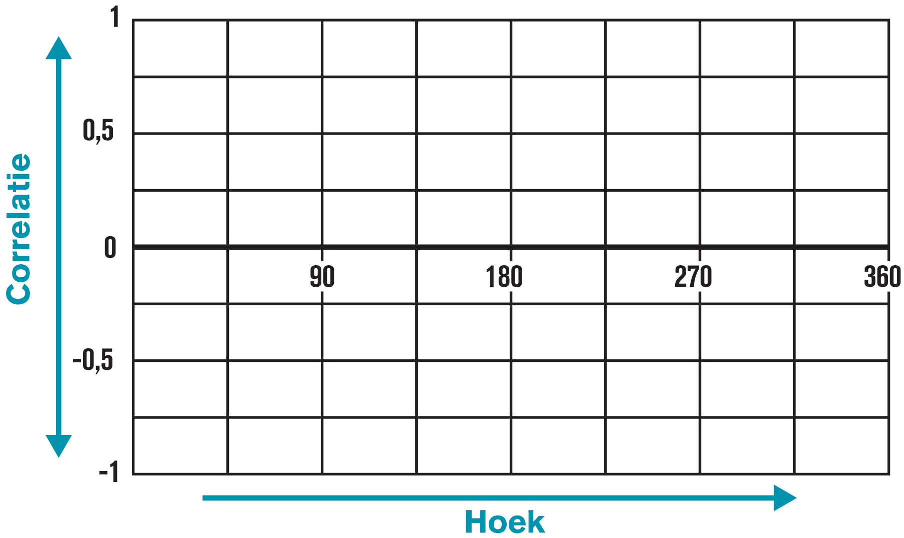
....

....

....

....

I. Teken in onderstaand assenstelsel het verband tussen de hoek γ en de correlatie C tussen de metingen, als de verborgen-variabelentheorie zou gelden.



WISKUNDIG INTERMEZZO

Voordat we kunnen gaan kijken hoe de correlatie tussen deze metingen er volgens een quantummechanische theorie zonder verborgen variabelen uit zou zien, hebben we wat extra wiskundig gereedschap nodig. Binnen de quantummechanica wordt de richting van de spin aangegeven door een vector. Als je wil weten in hoeverre een vector dezelfde kant op wijst als een andere vector, gebruik je het zogenaamde inproduct. Het resultaat van een inproduct tussen twee vectoren is een scalar (getal). Het inproduct wordt aangeven met een punt (•). Het inproduct van twee vectoren kun je als volgt berekenen:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta \tag{4}$$

Hierbij is $|a|$ de lengte van vector $\vec{a}$ en $|b|$ de lengte van vector $\vec{b}$, terwijl θ de hoek tussen deze beide vectoren is.

5.

A. Bereken wat het inproduct van twee haaks op elkaar staande vectoren is.

....

....

....

....

B. Leg uit waarom dit antwoord logisch is, als je bedenkt dat het inproduct aangeeft in hoeverre twee vectoren met elkaar overeenkomen.

....

....

....

C. Welk onderdeel van formule (4) zorgt hiervoor? Leg uit.

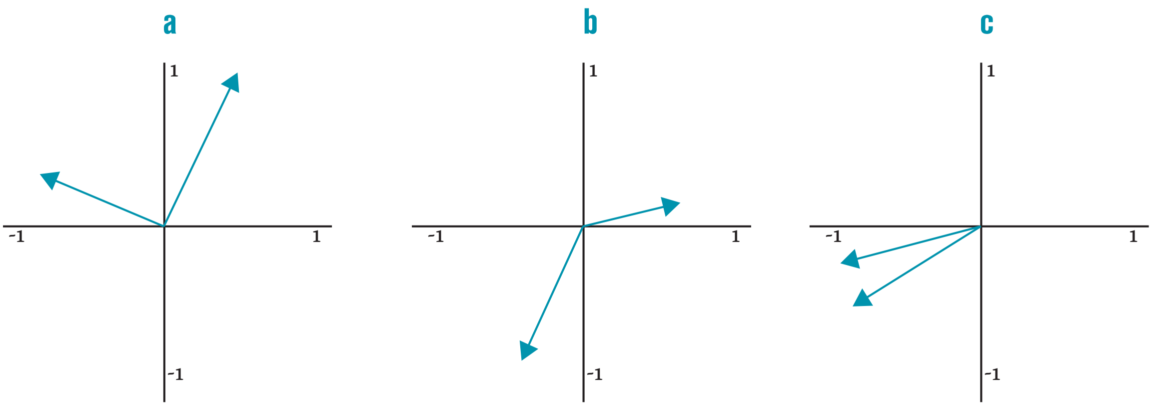
....

....

....

....

D. Bereken met behulp van je geodriehoek het inproduct van de volgende vectoren:



a: ....

....

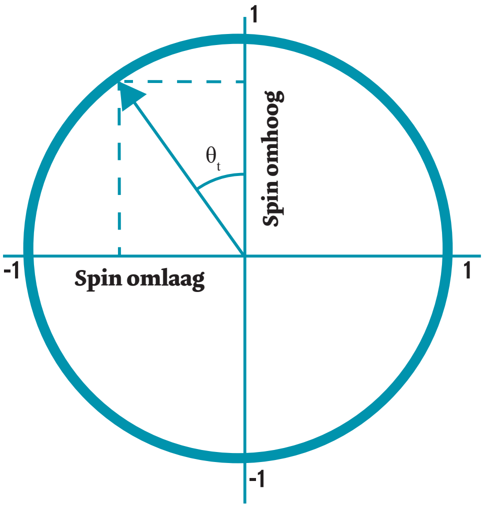
b: ....

....

c: ....

....

Volgens de quantummechanica kun je een superpositie van twee toestanden weergeven als een vector met lengte 1. Het gaat dan niet over de vector van de richting van de spin, maar een vector in een abstracte **toestandsruimte.** Hierin staan dus niet zoals gewoonlijk x en y op de assen, maar spin omhoog en spin omlaag:



Figuur 4: De toestand van een deeltje kan voorgesteld worden door een vector in de toestandsruimte.

Om van de coördinaten in deze toestandsruimte naar een waarschijnlijkheid voor een bepaalde meetuitkomst te komen moeten we het inproduct nemen met een vector van lengte 1 langs de betreffende as en dit kwadrateren.

6.

A. Toon met een berekening aan dat de totale kans om spin omhoog of spin omlaag te vinden gelijk is aan 1. Hint: gebruik $sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$.

....

....

....

....

B. Bereken voor de toestand uit het voorbeeld hoe groot de kans is dat je bij een meting de uitkomst spin omhoog vindt. Hoe groot is dus de kans dat je spin omlaag vindt?

....

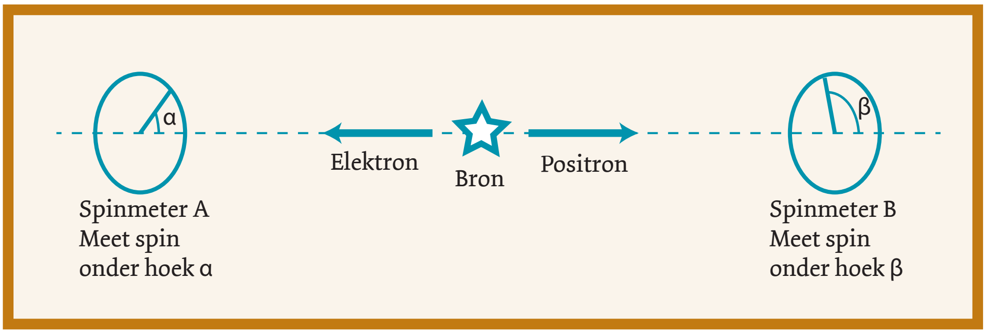
....

....

....

QUANTUMMETEN

In 1964 publiceerde de natuurkundige John Bell een artikel over voorspellingen vanuit de quantummechanica over de correlatie tussen meethoek en spintoestand. Hij had het over hetzelfde experiment als we hiervoor bekeken hebben (zie tekening hieronder). Hij stelde zichzelf de vraag wat er zou gebeuren als de quantummechanica wel een complete theorie was, zonder verborgen variabelen.



Figuur 5: Meetopstelling quantumcorrelatieexperiment.

7.

A. Denk je dat de relatie tussen de onderlinge hoek van de spinmeters en de correlatie hetzelfde is als in opgave 4? Waarom wel/niet?

....

....

....

....

Ook in deze opgave gebruiken we weer twee spinmeters, A en B. Spinmeter A meet de spintoestand van het elektron, spinmeter B de toestand van het positron. Het is belangrijk om te onthouden dat die twee deeltjes een tegengestelde spin hebben. Om spinmeters A en B hetzelfde resultaat te laten vinden, moeten we spinmeter B dus 180 graden draaien ten opzichte van spinmeter A. We noemen dit de neutrale positie van spinmeter B. Net als in de vorige opgave draaien we vervolgens spinmeter B vanuit de neutrale positie nog verder over een hoek γ.

B. Als je uitgaat van een elektron dat zich in een zuivere spin-omhoog-toestand bevindt ten opzichte van spinmeter A, over welke hoek γ (tussen de 0 en 180 graden) moet je spinmeter B vanuit de neutrale positie dan draaien om daar evenveel kans te hebben om voor het positron spin +1 als -1 te meten?

....

....

....

....

C. Teken in figuur 4 de eenheidsvectoren die de toestanden weergeven van deeltjes waarvoor we een even grote kans hebben om spin +1 als -1 te meten. (Er zijn vier van dergelijke eenheidsvectoren.) Welke hoeken maken deze vectoren met de assen? Wat valt je op als je het antwoord op deze vraag vergelijkt met het antwoord op vraag 7B?

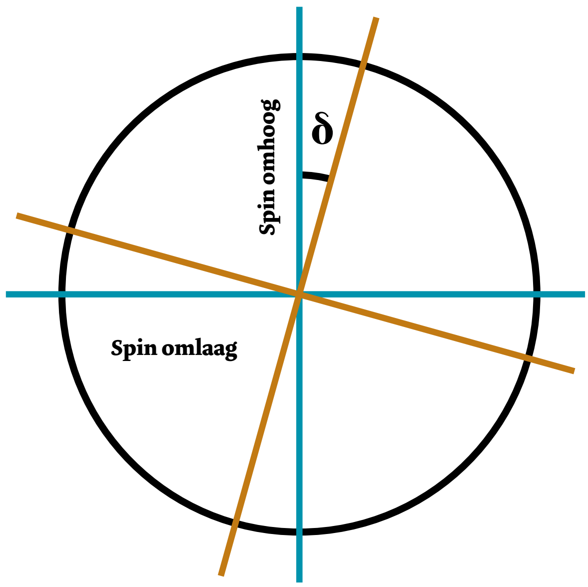
....

....

....

In figuur 4 tekenden we de toestand van een elektron gezien vanuit spinmeter A. Als we spinmeter B in de neutrale positie zetten, geldt precies dezelfde figuur natuurlijk ook voor de toestand van het positron gezien vanuit spinmeter B - de twee deeltjes hebben immers een tegengestelde spin, maar we hebben B ook 180 graden gedraaid om in de neutrale positie te komen. Met B in de neutrale positie kunnen we de toestand van het elektron en die van het positron dus met dezelfde vector weergeven.

Nu draaien we spinmeter B verder, over een hoek γ. Het resultaat is dan natuurlijk dat spinmeter B niet meer dezelfde toestand ziet als spinmeter A, maar een over een hoek γ gedraaide versie van deze toestand. In de toestandsruimte kunnen we dit weergeven door twee assenstelsels te tekenen: het eerste assenstelsel geeft weer hoe spinmeter A het elektron ziet; het tweede assenstelsel geeft weer hoe spinmeter B het positron ziet. Zie figuur 6. Je zou nu misschien verwachten dat je het assenstelsel ook eenvoudigweg over een hoek γ moet draaien, maar dat blijkt niet het geval te zijn! We noemen de hoek waarover je de assen wel moet draaien δ.



Figuur 6: Het draaien van spinmeter B kunnen we in de toestandsruimte weergeven door het draaien van het assenstelsel.

D. Leg aan de hand van je antwoorden bij 7B en 7C uit dat γ en δ niet even groot zijn. Beredeneer aan de hand van dit voorbeeld en nog wat soortgelijke voorbeelden (bijvoorbeeld γ = 0 graden en γ = 180 graden) wat het verband tussen γ en δ wel is.

....

....

....

....

Stel nu dat spinmeter A voor het elektron een spin van +1 meet. Na die meting is het elektron dus in een zuivere “spin omhoog”-toestand. Het positron is dan natuurlijk in de tegengestelde toestand, die spinmeter B in de neutrale positie ook als “spin omhoog” zou meten.

Je hebt nu alle instrumenten om te bepalen wat de formule is voor de kans $P_{gelijk}(\gamma)$ dat je ook bij spinmeter B spin +1 meet als je spinmeter B niet in de neutrale toestand laat staan, maar draait over een hoek γ. In opgave 7D heb je namelijk bepaald wat de bijbehorende hoek δ is waarover je het assenstelsel voor B in de toestandsruimte moet draaien, en in opgaven 6A en 6B heb je gezien hoe je de kans op “spin omhoog” uitrekent als de hoek tussen de toestandsvector en de assen gelijk is aan δ.

E. Gebruik deze resultaten om een formule voor $P_{gelijk}(\gamma)$ op te stellen. (Vergeet niet om na het uitrekenen van het inproduct het resultaat te kwadrateren! Zie de tekst aan het eind van opgave 5.)

....

....

....

....

....

....

....

F. Gebruik de formule die je hebt gevonden bij 7E, de formule (1) uit opgave 4 voor de correlatie C, en de formules uit tabel 36G van Binas om aan te tonen dat volgens de methode van Bell de volgende eenvoudige formule voor de correlatie volgt uit de quantummechanica:

$$C = \cos\gamma \qquad (5)$$

....

....

....

....

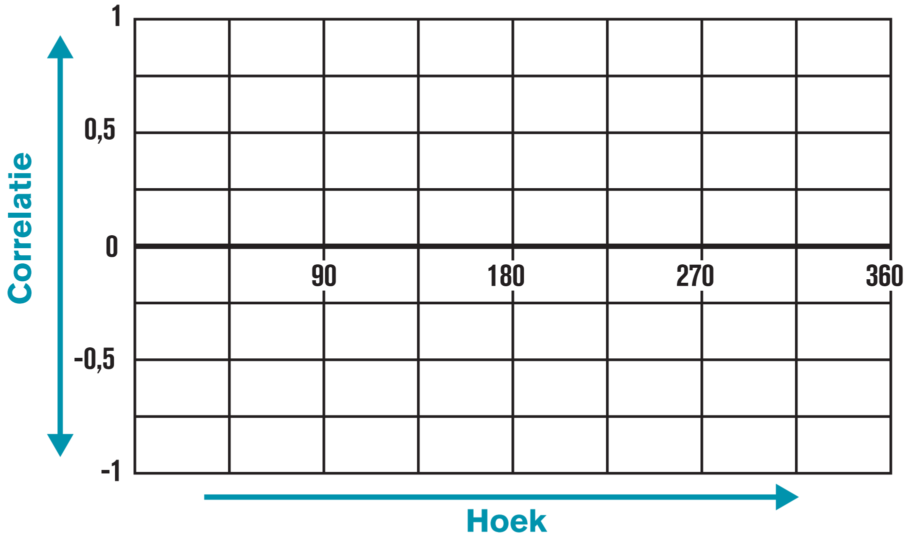
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

G. Teken in het onderstaande assenstelsel een grafiek van formule (5) en van het verband dat je gevonden hebt in opgaven 4G en 4H.



H. Wat valt je op als je beide grafieken vergelijkt? Denk je dat je dit verschil kunt meten?

. . . .

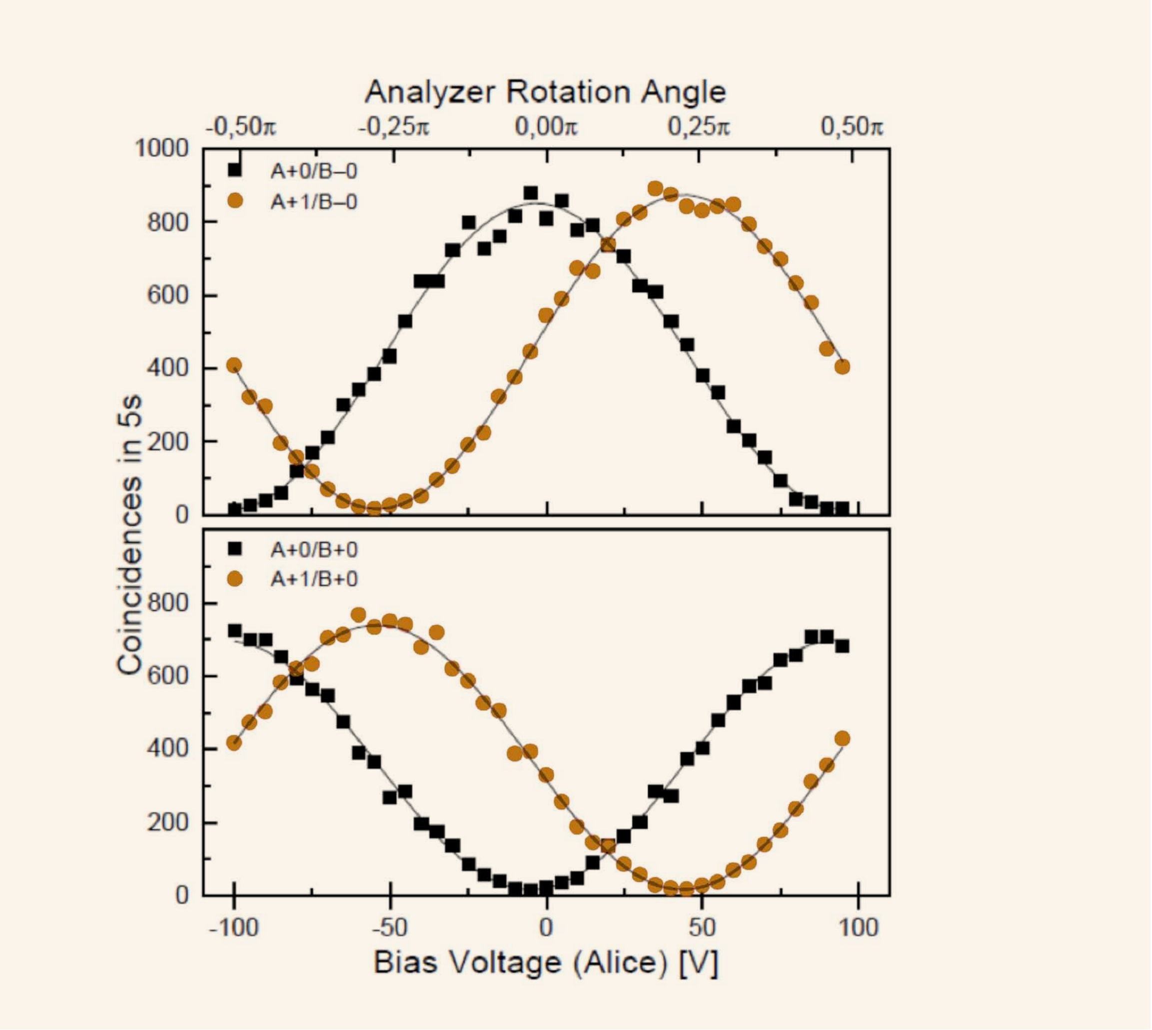
. . . .

. . . .

. . . .

METEN IS WETEN

Vanaf het einde van de jaren 1990 zijn experimenteel fysici erin geslaagd om deze metingen aan individuele quantumdeeltjes daadwerkelijk uit te voeren. Onderstaande grafiek geeft de quantumcorrelatie weer tussen twee fysiek van elkaar gescheiden meetstations.



Bron: G Weihs et al. (2008)

De meting die hier is gedaan, gebruikt niet het exacte systeem dat we besproken hebben, maar het geeft een goede indicatie voor de quantumcorrelatie tussen twee grootheden zoals de spins van het elektron en het positron.

8.

A. Als je kijkt naar de vorm van de grafiek, had Einstein het dan bij het rechte eind? Leg uit.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

B. Brainstorm met zijn tweeën over hoe valide de relativiteitstheorie van Einstein is met betrekking tot wat we hier gevonden hebben. Schrijf hieronder jullie ideeën op.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

C. Denk je dat het mogelijk is om dit verschijnsel uit te buiten om informatie sneller dan het licht over grote afstanden te versturen? Motiveer je antwoord.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .